



Contribution du Gipsa-lab au projet ANR LURGA ” Localisation d’Urgence Reconfigurable par GALILEO ”

Jean-Marc Brossier, Laurent Ros, Habti Abeida, Jordi Vilà Valls, Dalia
Oueidat

► To cite this version:

Jean-Marc Brossier, Laurent Ros, Habti Abeida, Jordi Vilà Valls, Dalia Oueidat. Contribution du Gipsa-lab au projet ANR LURGA ” Localisation d’Urgence Reconfigurable par GALILEO ”. [Rapport de recherche] Gipsa-Lab. 2010. hal-01016579

HAL Id: hal-01016579

<https://hal.science/hal-01016579>

Submitted on 30 Jun 2014

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L’archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d’enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Contribution du Gipsa-lab au projet ANR LURGA « Localisation d'Urgence Reconfigurable par GALILEO ».

T3.2 – Rapport de spécification des algorithmes de détection basés sur le filtrage particulaire (version finale)

Date	20 janvier 2010
Auteurs	Jean-Marc Brossier, Laurent Ros, Habti Abeida, Jordi Vilà Valls, Dalia Oueidat.

Résumé : Le présent document est une re-édition d'une contribution du Gipsa-lab au projet ANR (pour « Agence Nationale de la Recherche ») LURGA (pour « Localisation d'Urgence Reconfigurable par Galiléo »). Il est constitué d'une partie « avant propos » qui rappelle très brièvement le but du projet LURGA ainsi que les partenaires et leur roles, puis du livrable T.3.2 « rapport de spécification des algorithmes de détection basés sur le filtrage particulaire (version finale) », qui constitue l'essentiel de la contribution du laboratoire Gipsa-lab. Le but final du projet LURGA est d'améliorer les performances des algorithmes de localisation qui sont basés sur l'estimation des temps d'arrivée. En préliminaire au travail de localisation, la tâche de synchronisation est ainsi cruciale. Le rapport T.3.2 décrit ainsi les algorithmes de synchronisation permettent d'estimer le délai, la phase, et l'amplitude du signal reçu ou des bornes inférieures de performances associées à ce problème.

AVANT-PROPOS

à la re-édition du rapport livrable T3.2 (contribution de Gipsa-lab au projet LURGA)

Illustration

La figure ci-dessous illustre le déploiement du système de localisation LURGA. Les stations de base sont positionnées à l'extérieur de la zone de crise où la réception des signaux GALILEO n'est pas perturbée.

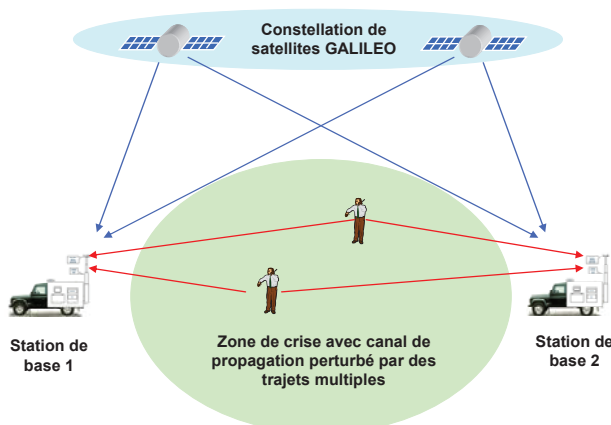


Figure 1 : Déploiement du système LURGA

Le projet « LURGA Localisation d'Urgence Reconfigurable par GALILEO » est un projet de recherche industrielle **coordonné par Thales Communications**, et qui bénéficie d'une aide ANR. Il associe aussi les laboratoires **SATIE et GIPSA-Lab** ainsi qu'une PME : **SIRADEL**. **Le projet a débuté en juin 2007 et s'est terminé en février 2010.**

Le projet LURGA a défini un système de localisation complet de terminaux mobiles basé sur le déploiement d'un réseau composés de stations intégrant des récepteurs GALILEO. Ces stations ont ainsi accès aux informations de position et de temps. Ces informations servent de point d'entrée aux traitements de localisation proposés par LURGA.

Les algorithmes de localisation mis en œuvre (par Thales) résultent de la fusion d'algorithmes TDOA (Time Difference Of Arrival) et AOA (Angle Of Arrival). Les algorithmes de type TDOA sont basés sur des calculs de temps de propagation et nécessitent la présence de stations parfaitement synchronisées. Les algorithmes AOA sont basés sur des traitements multi-capteurs. Une partie de l'étude (par Siradel) a porté sur la modélisation et l'estimation du canal de propagation. Cette étude a permis de valider les algorithmes proposés en prenant en compte des conditions de propagation difficiles. Une étude d'algorithmes de détection par synchronisation en temps des signaux a aussi été menée (par Satie et Gipsa-lab) dans le but de proposer des solutions permettant de garantir des performances optimales pour les cas où le canal de propagation évolue en fonction du temps.

Concernant la contribution de Gipsa-lab :

GIPSA-lab a proposé et étudié plusieurs algorithmes de synchronisation. Ces techniques permettent d'estimer le délai, la phase, et l'amplitude du signal reçu afin d'améliorer les performances des algorithmes de localisation TDOA qui sont basés sur l'estimation des temps d'arrivée. Etant donné qu'en transmission Radiofréquence, les variations de phase sont beaucoup plus rapides que les variations du délai (dû au rapport élevé entre la fréquence porteuse et la bande passante), le problème le plus crucial est celui de l'estimation de l'amplitude complexe (phase et amplitude d'un trajet).

Prétraitement améliorant l'estimation classique du retard.

L'estimateur optimal de retard pour un signal déterministe noyé dans un bruit blanc gaussien est le filtre adapté, c'est-à-dire le calcul de la fonction d'intercorrélation entre le signal bruité reçu et le signal attendu suivi de la recherche de la position du maximum de cette intercorrélation. Lorsque le signal reçu est affecté d'un offset fréquentiel (lié au Doppler ou aux imprécisions des oscillateurs utilisés en émission et en réception), cette méthode se généralise en remplaçant la fonction d'intercorrélation par une interambiguïté.

Cette approche classique est optimale lorsque les paramètres de nuisance (ici, les valeurs des gains complexes du canal au fil du temps) sont constants sur l'échantillon dont dépend l'estimateur. Si ces paramètres fluctuent à l'échelle de l'observation utile, la perte de cohérence entre le signal reçu et son modèle *a priori* dégrade l'estimation.

Une stratégie naturelle pour améliorer l'estimateur classique consiste alors à adjoindre au traitement classique un prétraitement destiné à rétablir autant qu'il est possible cette

cohérence en estimant, pour les compenser, les évolutions des amplitudes complexes du canal (phase et amplitude transmises). Cette estimation des amplitudes complexes repose, plus ou moins explicitement, sur une modélisation statistique *a priori* des variations.

Il est alors significatif de comparer l'approche classique et cette nouvelle approche pour quantifier le gain de traitement apporté par la prise en compte d'une statistique *a priori* quant à l'évolution des paramètres de nuisance.

Durant la première période du projet, nous (laboratoire Gipsa-lab) avons préliminairement traité de **l'estimation de la phase de formes d'onde de type GALILEO ou GPS pour un canal à amplitude constante et phase aléatoire Brownienne avec ou sans dérive**. Les modulations utilisées étaient linéaires de type NRZ ou BOC. Dans cette étude, l'un des buts était de **chiffrer l'apport d'un sur-échantillonnage** du signal après filtrage adapté en réception pour une **forme d'onde** de type **GALILEO ou GPS** (« roll-off » très élevé). Toutes les autres études menées dans le cadre de ce projet l'ont été sur la forme d'onde GSM.

Approche globale

Dans cette partie, les signaux sont de type GSM (modulation GMSK). Nous avons considéré **l'estimation de retard de propagation d'un signal GSM avec prise en compte d'un modèle *a priori* dynamique sur l'évolution de la phase et de l'amplitude d'un ou plusieurs trajets de propagation (Modèle Rayleigh avec spectre de Jakes)**.

Le système GSM utilise la modulation GMSK (« Gaussian minimum-shift keying ») , cas particulier binaire de la modulation à enveloppe constante CPM ("Continuous phase modulation"), contenant des propriétés non-circulaires. De nombreux algorithmes de synchronisation fréquentielle et temporelle ont été développés pour les signaux CPM. Ces algorithmes sont typiquement classifiés en Data-Aided (DA), et Non-Data-Aided (NDA), et ont été conçus selon l'hypothèse d'un canal BBAG (à Bruit Blanc Additif Gaussien). L'algorithme conventionnel DA pour ce type de problème consiste à rechercher le délai correspondant au maximum de la fonction de corrélation (ou d'ambiguïté) dans le plan retard-Doppler. Cependant, peu de travaux de recherche traitent du problème de synchronisation temporelle en modulation CPM pour un canal à variation temporelle. Sans chercher à réutiliser le traitement classique par ambiguïté, il est possible de formuler globalement le problème d'estimation du retard en présence de nuisances provenant des fluctuations de phase et d'amplitude (c'est-à-dire amplitudes complexes). L'objectif principal est de chiffrer l'apport de ces méthodes dynamiques d'estimation conjointe du retard et de la phase par rapport à une recherche classique de maximum sur la fonction d'ambiguïté (qui suppose une évolution déterministe des paramètres sur la durée de la fenêtre d'observation). Ce travail a donné lieu au développement de deux algorithmes (l'un basé sur l'algorithme EM, l'autre sur la méthode de maximum *a posteriori*) et aux calculs de bornes théoriques sur les performances. **Ce travail représente la majeure partie de notre contribution.**

Le problème de la synchronisation temporelle sous l'hypothèse d'un canal de Rayleigh à spectre de Jakes peut être formulé à l'aide d'un système dynamique Bayésien, avec des états cachés qui sont les gains complexes du canal au cours du bloc d'observation.

Pour cela, on peut approcher l'évolution temporelle des gains complexes par un processus auto-régressif du premier ordre, ce qui est une approximation courante. Les états (gains complexes) du modèle dynamique n'étant pas connus, ils ont aussi besoin d'être estimés, afin d'estimer le paramètre de temps d'arrivée ou délai. Nous sommes ainsi dans un cadre qui se prête très bien à l'utilisation de deux approches classiques :

1. **Filtrage ou du lissage optimal.** Dans cette optique, les algorithmes utilisables sont par exemple le filtrage particulaire ou le filtrage de Kalman étendu.
2. **Algorithme EM.** Cet algorithme a été notamment proposé dans la littérature en combinaison avec un lisseur de Kalman, afin d'estimer les paramètres d'un système de reconnaissance vocale, en présence d'états inconnus. Récemment, l'algorithme EM a aussi été appliqué pour de nombreux problèmes d'estimation de paramètre et d'apprentissage. Nous nous sommes inspirés de cette approche pour proposer notre premier algorithme.

Note : Initialement, nous avons envisagé d'utiliser des algorithmes de type particulaire, mais le modèle de canal défini progressivement au cours du projet puis arrêté par les différents partenaires, nous a finalement orienté vers d'autres solutions moins complexes au niveau calculatoire, et de même performance. *Pour ces raisons, des solutions autres que celles initialement prévues (filtrage particulaire) ont été développées en cours de projet.*

LURGA

LURGA

Localisation d'Urgence Reconfigurable par GALILEO

T3.2 – Rapport de spécification des algorithmes de détection basés sur le filtrage particulaire (version finale)

Date	20 janvier 2010
Auteurs	Jean-Marc Brossier, Laurent Ros, Habti Abeida, Jordi Vilà Valls, Dalia Oueidat.

Type de projet : Recherche et intégration

Thème : GALILEO Catalyseur

THALES

SIRADEL 

SATIE

gipsa-lab

LURGA

Version	C
---------	----------

Evolutions successives

Version	Date	Description
A	25/03/2008	T3.2A – « Apport du sur-échantillonnage à la poursuite de la gigue de phase » : document initial, premiers résultats avec forme d'onde GPS (NRZ) et Galileo (BOC).
B	20/04/2009	T3.2B – Rapport de spécification des algorithmes de détection basés sur le filtrage particulaire (version intermédiaire)

Table des matières

1 INTRODUCTION	6
2 MODULATION A PHASE CONTINUE.....	8
2.1 MODULATION GMSK NON LINEARISEE	9
2.2 MODULATION GMSK LINEARISEE.....	11
3 CANAL DE PROPAGATION RADIO-MOBILE.....	13
4 FORMULATION DU PROBLEME ET NOTATIONS.....	14
5 ESTIMATEUR DU MAXIMUM DE VRAISEMBLANCE DU RETARD.....	17
5.1 ALGORITHME EM	17
6 ESTIMATEUR DU MAXIMUM A POSTERIORI.....	20
7 ANALYSE DE PERFORMANCE.....	22
7.1 MHCRB.....	22
7.2 SIMULATIONS.....	24
8 ANNEXE DU DOCUMENT PRINCIPAL	31
8.1 ANNEXE 1 : PREUVE DE (21).....	31
8.2 ANNEXE 2 : PREUVE DU RESULTAT 1 (POUR LA BORNE MHCRB).....	32
9 ANNEXE 3 : ESTIMATION DE PHASE FRACTIONNEE.....	39
9.1 SYNCHRONISATION FRACTIONNEE: MODELISATION ET BORNES DE CRAMER-RAO.....	39
9.1.1 Modélisation	40
9.1.2 Bornes de Cramér-Rao pour la synchronisation fractionnée.....	47
9.1.3 Conclusion	60
9.2 SYNCHRONISATION FRACTIONNEE: METHODES D'ESTIMATION	60
9.2.1 Estimation de phase	60
9.2.2 Estimation conjointe de phase et offset de fréquence.....	70
9.2.3 Conclusion	74
10 ANNEXE 4 : FILTRAGE NON LINEAIRE ET MISE EN ŒUVRE PARTICULAIRE.....	86
10.1 MODELE D'ETAT, OBSERVATION	86
10.2 MISE EN ŒUVRE PARTICULAIRE.....	86
10.3 FILTRE PARTICULAIRE.....	88
11 CONCLUSION GENERALE.....	90
12 PUBLICATIONS DE GIPSA-LAB SUR LA PERIODE DU PROJET.....	91

Liste des acronymes

CRB	Cramér-Rao Bound
BCRB	Bayesian Cramér-Rao Bound
SCRB	Standard Cramér-Rao Bound
BOC	Binary offset carrier
NRZ	Non Return to Zero
GPS	Global Positioning System
GSM	Global System for Mobile communications
EKF	Extended Kalman Filter
SNR	Signal to Noise Ratio
EM	Algorithme « Expectation Maximization »
EQM	Erreur Quadratique Moyenne
TDOA	Time Difference Of Arrival

1 Introduction

La contribution de GIPSA-lab au projet LURGA concerne l'étude d'algorithmes de synchronisation. Ces techniques permettent d'estimer le délai, la phase, et l'amplitude du signal reçu afin d'améliorer les performances des algorithmes de localisation TDOA qui sont basés sur l'estimation des temps d'arrivée.

Etant donné qu'en transmission Radiofréquence, les variations de phase sont beaucoup plus rapides que les variations du délai (dû au rapport élevé entre la fréquence porteuse et la bande passante), le problème le plus crucial est celui de l'estimation de l'amplitude complexe (phase et amplitude d'un trajet).

Par exemple avec les ordres de grandeur du **GSM** (considéré dans le projet), la variation maximale du délai durant un slot $T_{\text{slot}} = 577 \mu\text{sec}$ sera de l'ordre de $dt = (v_m / c) \cdot T_{\text{slot}} = 0,064 \text{ ns}$ (avec la célérité $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/sec}$) pour une vitesse du mobile v_m de 120 km/h. La variation du délai dt est donc négligeable par rapport à la durée d'un élément (résolution) temporel qui est de $T_s = 3.7 \text{ micro-sec}$ (débit symbole $1/T_s = 270 \text{ kbit/sec}$) : $dt/T_s \approx 2 \cdot 10^{-5}$. Par contre la variation de phase engendrée $d\theta = 2\pi f_0 dt$ sera conséquente, de l'ordre de $41,5^\circ$ pour une fréquence porteuse de $f_0 = 1.8 \text{ GHz}$.

Une bonne estimation de la phase permettra de corriger précisément la phase du signal reçu (démodulation cohérente) et d'utiliser ensuite des techniques classiques pour la mesure du retard de propagation, finalement utile pour la localisation.

Le travail effectué à GIPSA-Lab se compose de plusieurs parties.

La première partie (chapitres 1 à 8) correspond au modèle finalement choisi pour le projet. Elle concerne l'estimation de phase et de temps de propagation dans les systèmes GSM avec un canal de Rayleigh :

1. **L'estimation de retard de propagation d'un signal GSM avec prise en compte d'un modèle *a priori* dynamique sur l'évolution de la phase et de l'amplitude d'un ou plusieurs trajets de propagation (Modèle Rayleigh avec spectre de Jakes).** L'objectif principal est de chiffrer l'apport de ces méthodes dynamiques d'estimation conjointe du retard et de la phase par rapport à une recherche classique de maximum sur la fonction d'ambiguïté (qui suppose une évolution déterministe des paramètres sur la durée de la fenêtre d'observation). Dans cette partie, les signaux sont de type GSM (modulation GMSK). Ce travail a donné lieu au développement de deux algorithmes (l'un basé sur l'algorithme EM, l'autre sur la méthode de maximum a posteriori) et aux calculs de bornes théoriques sur les performances. **Ce travail est l'objet essentiel du présent document, et représente la majeure partie de notre contribution consacrée entièrement au projet LURGA** (développée durant le post-doc de 13 mois de Habti ABEIDA).

Les autres parties (chapitre 9) traitent de scénarios envisagés initialement pour le projet (Canal à amplitude fixe, forme d'onde GALILEO et GPS, approximation linéaire de la modulation GSM). Ces travaux sur des modèles plus simples ont permis une première approche du problème, elles sont développées en annexe.

2. **L'estimation de la phase de formes d'onde de type GALILEO ou GPS pour un canal à amplitude constante et phase aléatoire (Modèle Brownien avec ou sans dérive).** Les modulations utilisées sont linéaires de type NRZ ou BOC. Dans cette étude, l'objectif était d'estimer la phase du signal en vue d'utiliser une méthode classique, de type corrélation, pour estimer ensuite le retard. L'un des buts était de **chiffrer l'apport d'un suréchantillonnage** du signal après filtrage adapté en réception pour une **forme d'onde** de type **GALILEO ou GPS** (« roll-off » très élevé). Ces travaux se sont déroulés durant la première période du projet, ils ont donné lieu à de nombreuses publications [G1], [G4], [G6], [G8].
3. **Intérêt de l'approximation linéaire d'une modulation GMSK pour l'estimation de phase.** L'approximation linéaire de la modulation GMSK utilisée dans le GSM a été exploitée permettant l'adaptation du filtre de Kalman à l'estimation de phase en mode suréchantillonné (rapport de stage de Dalia Oueidat [3]).

Dans ce rapport, nous considérons maintenant la modulation CPM (modulation à phase continue), dont fait partie la modulation GMSK, et un modèle plus général défini en accord avec les partenaires, en supposant que le canal multi-trajets variable dans le temps est de type Rayleigh avec un spectre de Jakes. Les contributions sont les suivantes :

1. Rappel de la forme générale de la modulation CPM, modulation GMSK linéarisée et non. Des comparaisons numériques ont été également effectuées entre la vraie modulation GMSK et la modulation GMSK linéarisée.
2. Rappel concernant le canal multi-trajets variable dans le temps de type Rayleigh avec un spectre de Jakes utilisé dans ce document.
3. Développement en Matlab d'un algorithme d'estimation conjointe du retard supposé fixe sur la durée d'observation et des gains complexes du canal à évanouissement lent. Du fait de la présence du retard déterministe et des données manquantes définies par les gains complexes du canal, l'algorithme proposé combine l'algorithme EM et l'algorithme de lissage de Kalman.
4. Estimation conjointe de la phase et du retard au sens du maximum a posteriori.
5. Evaluation des performances en termes d'erreur quadratique moyenne.
6. Calcul analytique des bornes de Cramér-Rao hybrides modifiées sur le retard et sur les gains complexes du canal. L'obtention de ces bornes est nécessaire afin de juger de la qualité des estimateurs en termes d'erreur quadratique moyenne. Elles sont d'autant plus importantes qu'aucune méthode de référence n'existe en termes d'estimation conjointe du retard et des gains complexes du canal. Elles fournissent donc la référence pour l'estimation.
7. Evaluation de l'impact du point de l'initialisation sur la convergence de l'algorithme.

Ces travaux ont donné lieu à un article de conférence ([G7], Globecom 09).

Notons que lors de ces études, nous avons été amenés à conclure que l'utilisation du filtrage particulière pour résoudre le problème d'estimation de retard (avec le modèle de canal qui est apparu comme étant adapté au projet) n'apporte pas d'avantages en termes de performances par rapport à des solutions de plus faible coût. Pour le problème d'estimation de phase, nous avons montré, dans un article de revue [G8] (Cf Annexe 3 du présent document, chapitre 9.2), qu'une solution de type Kalman étendu procure les mêmes performances qu'une méthode particulière. Il en est de même pour le problème d'estimation du retard du fait des très faibles vitesses de variation de ce paramètre (pouvant même être supposé constant sur la durée du midamble GSM). **Pour ces raisons, des solutions autres que celles initialement prévues (filtrage particulière) ont été développées en cours de projet** en combinant notamment un algorithme EM avec un lisseur de Kalman. Nous avons tout de même laissé en annexe 4 (chapitre 10) une synthèse sur le filtrage particulière, menée en début de projet.

2 Modulation à phase continue

L'enveloppe complexe $s(t, a)$ de la modulation à phase continue (CPM) s'écrit sous la forme

$$s(t, a) = e^{i\phi(t, a)}. \quad (1)$$

$s(t, a)$ est donc de module constant et sa phase $\phi(t, a)$ est donnée par :

$$\begin{aligned} \phi(t, a) &= 2\pi h \int_{-\infty}^t \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_j g(u - jT_s) du \\ &= 2\pi h \sum_{j \in \mathbb{Z}} a_j q(t - jT_s), \end{aligned} \quad (2)$$

où $a = (\dots, a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, \dots)$ est une séquence de symboles binaires indépendants et identiquement distribués (i.i.d). Nous supposons dans ce document que chaque symbole a_n prend de manière équiprobable ses valeurs dans l'alphabet binaire $\{-1, +1\}$. T_s est la période symbole et $g(t)$ est le filtre de mise en forme. La fonction $g(t)$ est positive sur l'intervalle $[0, LT_s]$, et nulle hors de l'intervalle $[0, LT_s]$, où L est un entier positif. Ainsi, la fonction $q(t)$ définie par $q(t) = 0$ si $t < 0$, et $q(t) = \int_0^t g(u) du$ sinon, est telle que $q(t) = 1/2$ pour $t \geq LT_s$. Le paramètre h est appelé l'indice de modulation et il se trouve typiquement dans l'intervalle $[0, 1)$. On peut interpréter $g(\cdot)$ comme le filtre de mise en forme de la pulsation instantanée de $s(t, a)$ et $q(\cdot)$ comme le filtre de mise en forme de la phase de $s(t, a)$. Il est utile de noter qu'en raison de la définition de $q(t)$, la phase $\phi(t, a)$ peut être écrite [21, rel. (5-3-4)] pour tout $nT_s \leq t \leq (n+1)T_s$,

$$\phi(t, a) \stackrel{\text{def}}{=} \pi h \sum_{j=-\infty}^{n-L} a_j + 2\pi h \sum_{j=0}^{L-1} a_{n-j} q(t - (n-j)T_s). \quad (3)$$

Ainsi, la variation de phase finale induite par un symbole a_n est égale à $\pm \pi h$. Il existe deux types de modulations CPM : les CPM à réponse totale (Full Response) [6], correspondent à un filtre de mise en forme $g(t)$ de longueur T_s ($L = 1$). Les CPM à réponse partielle (Partial Response) [5] correspondent à une longueur de filtre de mise en forme égale à LT_s où $L \geq 2$.

On distingue différentes classes de modulations CPM selon la forme du filtre de mise en forme $g(t)$ utilisé. Une revue des familles de modulations CPM employées en pratique est disponible dans [7, 8], parmi lesquelles on peut citer les modulations REC et RC dont les filtres de mise en forme associés sont donnés par :

$$\text{Rectangle: REC} \quad g(t) = \begin{cases} \frac{1}{2LT_s} & \text{pour } 0 \leq t \leq LT_s \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\text{Cosinus surélevé: RC} \quad g(t) = \begin{cases} \frac{1}{2LT_s} \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi t}{LT_s}\right) \right) & \text{pour } 0 \leq t \leq LT_s \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Nous présentons dans les deux paragraphes suivants la modulation GMSK linéarisée ou non, que nous utilisons dans la suite de ce document.

2.1 Modulation GMSK non linéarisée

La modulation GMSK (utilisée en GSM) est un cas particulier de la modulation CPM, dans lequel l'indice de modulation $h = 1/2$, et le filtre de mise en forme $g(t)$ est donné par la convolution entre le filtre gaussien $h(t)$ et le filtre rectangulaire $rect(t)$

$$g(t) = h(t) * rect(t) \quad (4)$$

où

$$rect(t) = \begin{cases} \frac{1}{2T_s}, & |t| \leq \frac{T_s}{2} \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

$$h(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\eta}} \exp\left(-\frac{t^2}{2\eta^2}\right)$$

avec $\eta = \frac{\sqrt{\ln 2}}{2\pi B}$, où B est la largeur de bande de fréquence à 3 dB d'un filtre gaussien passe-bas.

En développant la convolution (4), la fonction $g(t)$ peut s'écrire sous la forme

$$g(t) = \frac{1}{2T_s} \left[Q\left(\frac{t - T_s/2}{\eta}\right) - Q\left(\frac{t + T_s/2}{\eta}\right) \right],$$

où $Q(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_t^\infty e^{-u^2/2} du = \frac{1}{2} (1 - \text{erf}(\frac{t}{\sqrt{2}}))$. Le filtre de mise en forme $g(t)$ est tronqué afin de limiter son support temporel à $0 \leq t \leq LT_s$. Nous notons qu'une valeur supérieure à $L = 3$ est choisie pour L dans le système GSM. Pour rendre le filtre $g(\cdot)$ causal avec une longueur LT_s , nous considérons dans la suite le filtre décalé $g(t) \stackrel{\text{def}}{=} g(t - \frac{LT_s}{2})$. La longueur de la réponse en fréquence tronquée dépend du paramètre BT , appelé largeur de bande de fréquence normalisée. Ce paramètre est souvent réglé afin d'obtenir les propriétés spectrales souhaitées. Les valeurs usuelles de BT pour les modulateurs GMSK sont 0.3 et 0.5.

Puisque notre objectif est l'estimation de paramètres du canal de propagation, dont les retards, nous avons besoin d'une expression explicite de la primitive $q(t)$ du filtre de mise en forme $g(t)$ dont dépend le signal CPM (1). Grâce à $\int \text{erf}(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2} + t \text{erf}(t)$ et après quelques manipulations élémentaires, nous obtenons

$$\begin{aligned} q(t) &= \int g\left(t - \frac{LT_s}{2}\right) dt = \frac{1}{2T_s} \left[\int Q\left(\frac{t - (L+1)T_s/2}{\eta}\right) - \int Q\left(\frac{t - (L-1)T_s/2}{\eta}\right) \right] \\ &= \frac{1}{2T_s} \left[(t - (L+1)T_s/2) Q\left(\frac{t - (L+1)T_s/2}{\eta}\right) - (t - (L-1)T_s/2) Q\left(\frac{t - (L-1)T_s/2}{\eta}\right) \right] \\ &\quad - \frac{\eta}{\sqrt{2\pi}} \left[\exp\left\{-\frac{1}{2} \left[\frac{t - (L+1)T_s/2}{\eta}\right]^2\right\} - \exp\left\{-\frac{1}{2} \left[\frac{t - (L-1)T_s/2}{\eta}\right]^2\right\} \right] \end{aligned}$$

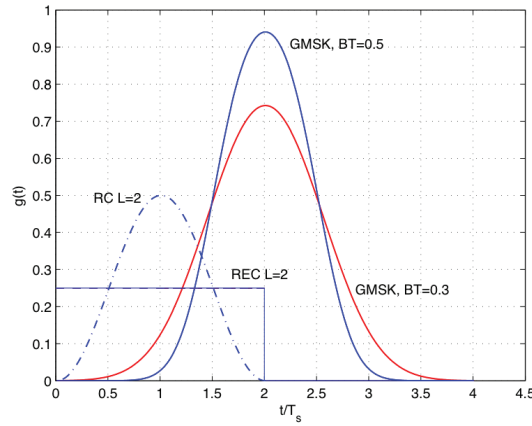


Figure 1: Forme de la réponse de fréquence $g(t)$ dans le cas de la 2REC, de la 2RC et d'une GMSK avec $BT = 0.3$ et $BT = 0.5$

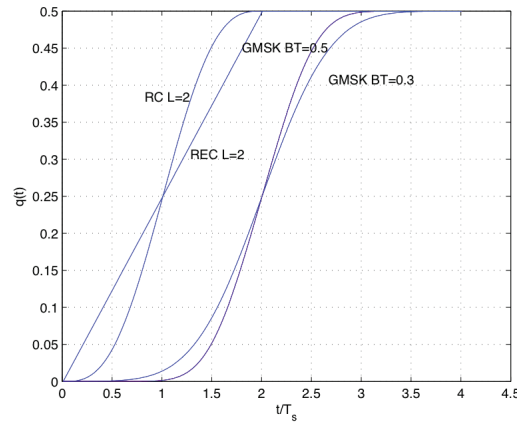


Figure 2: Forme de la réponse de phase $q(t)$ dans le cas de la 2REC, de la 2RC et d'une GMSK avec $BT = 0.3$ et $BT = 0.5$

La figure 1 montre les allures des mises en forme $g(t)$, Gaussienne, Rectangulaire et en cosinus surélevé. La figure 2 montre les allures des fonctions $q(t)$ correspondantes.

2.2 Modulation GMSK linéarisée

Laurent [4] a montré qu'un signal CPM binaire, peut s'écrire comme une somme de modulations d'amplitude. Grâce à la représentation de Laurent, l'expression du signal GMSK (avec $L = 4$) peut être linéarisée, et est donnée par

$$s(t, a) \approx \sum_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{a}_{0,n} C_0(t - nT_s) + \sum_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{a}_{1,n} C_1(t - nT_s) \quad (5)$$

où $\tilde{a}_{0,n} \stackrel{\text{def}}{=} ja_n \tilde{a}_{0,n-1}$, $\tilde{a}_{1,n} \stackrel{\text{def}}{=} ja_n \tilde{a}_{0,n-2}$ et

$$C_0(t) = S_0(t)S_1(t)S_2(t)S_3(t) \text{ pour } 0 \leq t \leq 5T_s$$

$$C_1(t) = S_0(t)S_2(t)S_3(t)S_5(t), 0 \leq t \leq 3T_s$$

$$S_n(t) = \sin(\psi(t + nT_s)) n \in \{0, 1, 2, 3, 5\}$$

avec

$$\psi(t) = \begin{cases} \pi q(t), & 0 \leq t \leq LT_s \\ \frac{\pi}{2}[t - 2q(t - LT_s)], & LT_s \leq t \end{cases} \quad (6)$$

Ainsi, compte tenu de (6), la fonction $\psi(t)$ n'est pas nulle sur l'intervalle $[0, 2LT_s]$ et symétrique autour de $t = LT_s$.

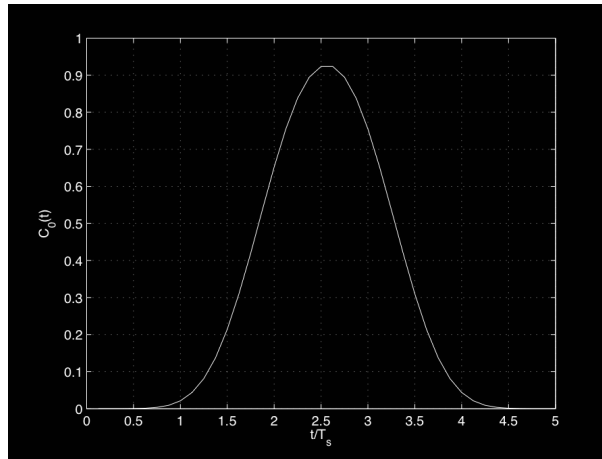


Figure 3: Le filtre $C_0(t)$ avec $L = 4$.

Il est montré [4] que 99.63 % de l'énergie du signal est contenu dans $C_0(t)$. Ainsi, le signal $s(t, a)$ peut être écrit en fonction de $C_0(t)$ seulement :

$$s(t, a) \approx \sum_{n \in \mathbb{Z}} j^n \beta_n C_0(t - nT_s) \quad (7)$$

où $\beta_n \stackrel{\text{def}}{=} ja_n \beta_{n-1}$. Notons que le support de $C_0(t)$ est égal à $L + 1$, comme le montre la figure 3.

Pour avoir une idée de la qualité de cette approximation, les figures 4 et 5 montrent la partie imaginaire et l'enveloppe complexe du signal de base GMSK $s(t, a)$ et de son approximation donnée par (7).

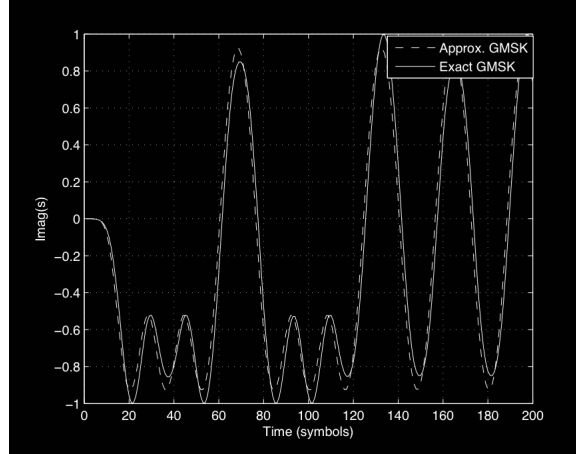


Figure 4: Linéarisation du signal GMSK avec $L = 4$, $BT=0.3$

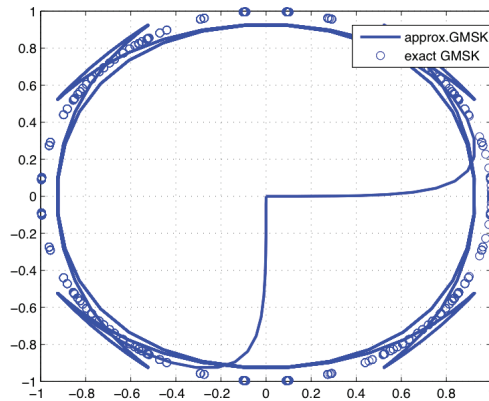


Figure 5: Enveloppe complexe du signal GMSK $L = 4$, $BT=0.3$

3 Canal de propagation radio-mobile

Dans ce document, nous supposons que le canal multi-trajets variable dans le temps est de type Rayleigh avec un spectre de Jakes, et est donné par :

$$h(t, \tau) = \sum_{l=1}^{L_c} \alpha_l(t) \delta(\tau - \tau_l) \quad (8)$$

où L_c est le nombre de trajets, $\alpha_l(t)$ et τ_l sont respectivement des gains gaussiens complexes circulaires de variance σ_α^2 et le retard associés au l – ième trajet. Les gains $\alpha_l(t)$ sont supposés non corrélés deux à deux mais corrélés temporellement d'après la fonction d'auto-corrélation donnée par :

$$R(\Delta t) \stackrel{\text{def}}{=} E(\alpha_l(t)\alpha_l^*(t-\Delta t)) = \sigma_\alpha^2 J_0(2\pi f_d \Delta t),$$

où $J_0(\cdot)$ est la fonction de Bessel de première espèce d'ordre zéro et f_d est la fréquence Doppler maximale. La densité spectrale de puissance [9] correspondante de la partie réelle et imaginaire est donnée par :

$$S(w) = \begin{cases} \sigma_\alpha^2 \frac{1}{\pi f_d} \frac{1}{\sqrt{1 - (\frac{w}{f_d})^2}}, & |w| < f_d \\ 0, & \text{sinon} \end{cases} \quad (9)$$

Le canal de Rayleigh corrélé variable dans le temps peut être simulé avec l'approche basée sur le modèle autorégressif (AR) stochastique présenté dans [13], que nous adoptons par la suite dans toutes nos simulations. Nous notons que d'autres approches ont été présentées dans la littérature pour simuler des canaux de Rayleigh corrélés (cf. par exemple [9, 11, 12]).

4 Formulation du problème et Notations

L'enveloppe complexe du signal émis $s(t, a)$ est défini par (1). On suppose que la réception est perturbée par un canal à trajets multiples de type Rayleigh variant dans le temps défini par (8) et par un éventuel bruit gaussien additif complexe circulaire $b(t)$. Le signal reçu peut être donc écrit sous la forme :

$$y(t) = \sum_{l=1}^{L_c} \alpha_l(t) s(t - \tau_l, a) + b(t).$$

En pratique, le signal reçu est échantillonné à la période $T_e = \frac{T_s}{M}$ où M est un entier positif

quelconque. On suppose donc que le bruit $b(t)$ est blanc dans la bande de $[-\frac{1}{2T_e}, \frac{1}{2T_e}]$, sa densité spectrale est égale à une constante N_0 dans cette bande de fréquences et nulle ailleurs.

En échantillonnant le signal reçu $y(t)$ à la période T_e , on obtient le signal à temps discret suivant :

$$y(kT_e) = \sum_{l=1}^{L_c} \alpha_l(kT_e) s_k(\tau_l, a) + b(kT_e) \quad (10)$$

où $s_k(\tau_l, a) \stackrel{\text{def}}{=} s(kT_s - \tau_l, a) = e^{i\phi_k(\tau_l, a)}$, $\phi_k(\tau_l, a) \stackrel{\text{def}}{=} \phi(kT_s - \tau_l, a)$ et $b(kT_e)$ est un bruit de variance $\sigma^2 = \frac{N_0}{T_e}$. Le signal $y(kT_e)$ est observé sur une durée correspondant à N symboles, *i.e.*, on dispose des échantillons $(y(kT_e))_{k=0, \dots, NM}$. Grâce à l'expression (3), la phase échantillonnée $\phi_k(\tau_l, a)$ du signal discret retardé $s_k(\tau_l, a)$ peut s'exprimer après quelques manipulations des indices sous la forme :

$$\phi_{nM+m}(\tau_l, a) \stackrel{\text{def}}{=} \phi((nM+m)T_e - \tau_l, a) = \pi h \sum_{j=-\infty}^{n-L} a_j + 2\pi h \sum_{j=0}^{L-1} a_{n-j} q(mT_e + jT_s - \tau_l), \quad (11)$$

pour tout $n \geq 0$ et $m = 0, \dots, M$, les coefficients $q_{j,m}(\tau_l)$ dépendent du l -ième retard τ_l , ils sont définis par $q_{j,m}(\tau_l) \stackrel{\text{def}}{=} q(mT_e + jT_s - \tau_l)$. L'expression (11) permet d'exprimer les échantillons $y(kT_e)$ donnés par (10) de la manière suivante. Pour tout n tel que $n \geq 0$ et pour tout $m = 0, \dots, M$,

$$y((nM+m)T_e) = \sum_{l=1}^{L_c} \alpha_l(kT_e) s_{nM+m}(\tau_l, a) + b((nM+m)T_e). \quad (12)$$

Soit y_n le vecteur qui regroupe les M échantillons associés au n -ième symbole défini par :

$y_n \stackrel{\text{def}}{=} (y((nM)T_e), \dots, y((nM+M-1)T_e))^T$. De même, on pose $b_n \stackrel{\text{def}}{=} (b((nM)T_e), \dots, b((nM+M-1)T_e))^T$, $\alpha_{l,n} \stackrel{\text{def}}{=} (\alpha_l((nM)T_e), \dots, \alpha_l((nM+M-1)T_e))^T$ et $G_n(\tau_l) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Diag}(e^{i\phi_{nM}(\tau_l, a)}, \dots, e^{i\phi_{nM+M-1}(\tau_l, a)})$ pour tout $l = 1, \dots, L_c$. Avec ces notations et à partir de l'équation (12), nous arrivons alors au modèle d'observation général suivant :

$$\begin{aligned} y_n &= \sum_{l=1}^{L_c} G_n(\tau_l) \alpha_{l,n} + b_n, \\ &= G_n(\tau) \alpha_n + b_n, \end{aligned} \quad (13)$$

où $\alpha_n \stackrel{\text{def}}{=} (\alpha_{1,n}^T, \dots, \alpha_{L_c,n}^T)^T$ et $G_n(\tau) \stackrel{\text{def}}{=} (G_n(\tau_1), \dots, G_n(\tau_{L_c}))$ et où $\tau \stackrel{\text{def}}{=} (\tau_1, \dots, \tau_{L_c})^T$.

Nous adoptons par la suite les hypothèses suivantes :

1. Les symboles $\{a_n\}$ sont supposés connus à la réception (Estimation Data-aided (DA) ou supervisée)

2. Les gains du canal $\alpha_l(\cdot)$ ne varient pas durant une période symbole mais varient d'une période symbole à l'autre, *i.e.*, les coefficients $\alpha_l((nM+m)T_e)$ pour tout $m=0, \dots, M-1$, sont tous égaux à la même valeur notée par $\alpha_{l,n}$.

Sous l'hypothèse 2, le modèle d'observation devient :

$$\mathbf{y}_n = \sum_{l=1}^{L_c} \mathbf{g}_n(\boldsymbol{\tau}_l) \alpha_{l,n} + \mathbf{b}_n, \quad (14)$$

$$= \mathbf{G}_n(\boldsymbol{\tau}) \mathbf{a}_n + \mathbf{b}_n, \quad (15)$$

où $\mathbf{a}_n \stackrel{\text{def}}{=} (\alpha_{1,n}, \dots, \alpha_{L_c,n})^T$, $\mathbf{G}_n(\boldsymbol{\tau}) \stackrel{\text{def}}{=} (\mathbf{g}_n(\boldsymbol{\tau}_1), \dots, \mathbf{g}_n(\boldsymbol{\tau}_{L_c}))$ et $\mathbf{g}_n(\boldsymbol{\tau}_l) \stackrel{\text{def}}{=} (e^{i\phi_{nM}(\boldsymbol{\tau}_l, a)}, \dots, e^{i\phi_{nM+M-1}(\boldsymbol{\tau}_l, a)})^T$.

Soit \mathbf{y} le vecteur qui regroupe l'ensemble des données observées : $\mathbf{y} = (y_0^T, \dots, y_N^T)^T$. Nous supposons que les paramètres $\boldsymbol{\tau}$ et $\mathbf{a} \stackrel{\text{def}}{=} (\mathbf{a}_0^T, \dots, \mathbf{a}_N^T)^T$ sont inconnus. On désigne alors par $\boldsymbol{\theta}$ le vecteur constitué par ces deux paramètres : $\boldsymbol{\theta} \stackrel{\text{def}}{=} (\boldsymbol{\tau}^T, \mathbf{a}^T)^T$. Dans le but de simplifier l'algorithme d'estimation du paramètre $\boldsymbol{\theta}$ que nous développons par la suite, nous avons décidé de représenter les variations temporelles du canal par un modèle auto-régressif (AR) d'ordre 1 :

$$\mathbf{a}_n = \gamma \mathbf{a}_{n-1} + \mathbf{e}_n \quad (16)$$

où \mathbf{e}_n est un bruit blanc additif, gaussien complexe circulaire de matrice de covariance $\sigma_e^2 I$ avec $\sigma_e^2 = \sigma_a^2(1-\gamma^2)$ et $\gamma = J_0(2\pi f_d T)$. Nous notons que la matrice de corrélation du vecteur \mathbf{a}_n dans le cas du modèle de Jakes [9] peut être exprimée comme

$$R_{\mathbf{a}}(n, m) \stackrel{\text{def}}{=} E(\mathbf{a}_n \mathbf{a}_m^H) = \sigma_a^2 J_0(2\pi f_d T |n-m|) I$$

où I désigne la matrice identité. Il est possible de calculer cette matrice de corrélation en fonction des paramètres de ce nouveau modèle (16) :

$$E(\mathbf{a}_n \mathbf{a}_{n-k}^H) = \sigma_a^2 \gamma^{|k|} I.$$

Avec ces notations, nous arrivons donc au modèle d'espace d'état suivant :

$$\begin{cases} \mathbf{a}_n &= \gamma \mathbf{a}_{n-1} + \mathbf{e}_n \\ \mathbf{y}_n &= \mathbf{G}_n(\boldsymbol{\tau}) \mathbf{a}_n + \mathbf{b}_n \end{cases} \quad (17)$$

Le problème d'intérêt de ce document est l'estimation du paramètre τ et les états α à partir des données observées formant le vecteur y . Due à la présence du paramètre déterministe τ , nous considérons dans la section suivante l'estimateur du maximum de vraisemblance.

5 Estimateur du maximum de vraisemblance du retard

L'estimateur du maximum de vraisemblance (MV) est un estimateur asymptotiquement efficace [16] (*i.e.*, atteint la borne de Cramér Rao lorsque le nombre d'observations tend vers l'infini). Cet estimateur consiste à chercher la valeur de τ qui maximise la vraisemblance $P(y | a; \tau)$ du vecteur y des données observées. Dans le cas de notre modèle d'état (17), la vraisemblance $P(y | a; \tau)$ n'est pas calculable puisque les états α sont non observés. Par conséquent l'estimateur du MV ne peut pas être obtenu directement par des techniques d'optimisation classiques (gradient, Newton, ...) qui nécessitent le calcul de la fonction à optimiser. Pour remédier à cette difficulté, nous développons dans la section suivante l'algorithme Expectation-Maximization (EM).

5.1 Algorithme EM

L'algorithme EM introduit par Dempster et al [10], est une méthode très utilisée pour calculer itérativement des estimateurs du maximum de vraisemblance (sous entendu le logarithme de la vraisemblance) et donc le maximum de la vraisemblance lui-même dans le cas où le modèle d'état est un modèle à données manquantes ou à données non observables. Son nom provient du fait qu'à chaque itération, il est composé de deux étapes : une étape E (Expectation) où l'espérance de la vraisemblance est calculée en tenant compte des dernières variables observées, et une étape M (Maximisation) où les nouveaux estimateurs du maximum de vraisemblance sont calculés en maximisant la vraisemblance trouvée à l'étape E. Les paramètres trouvés à cette étape M sont ensuite utilisés pour une nouvelle étape E et nous itérons ainsi de suite. Le principe de l'algorithme EM s'appuie sur des données complètes z qu'il considère formées par y et des données manquantes α qu'on désirerait ensuite estimer : $z \stackrel{\text{def}}{=} (y^T, \alpha^T)^T$. Cette fois-ci la vraisemblance de z notée par $P(z; \tau)$ est simple à calculer, et est donnée par l'expression suivante :

$$P(z; \tau) = P(\alpha_0; \tau) \prod_{n=1}^N P(\alpha_n | \alpha_{n-1}; \tau) \prod_{n=1}^N P(y_n | \alpha_n, a; \tau), \quad (18)$$

grâce au caractère Markovien de α . En utilisant la gaussianité du bruit, la log-vraisemblance de l'ensemble complet des données peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\ln(P(z; \tau)) = C(\sigma^2, \sigma_e^2, \sigma_0^2) - \frac{1}{\sigma^2} \sum_{n=1}^N \|y_n - G_n(\tau)\alpha_n\|^2$$

$$-\frac{1}{\sigma_e^2} \sum_{n=1}^N \|\mathbf{a}_n - \gamma \mathbf{a}_{n-1}\|^2 - \frac{1}{\sigma_e^2} \|\mathbf{a}_0\|^2, \quad (19)$$

où \mathbf{a}_0 est l'état initial supposé gaussien de matrice de covariance $\sigma_0^2 I$, et $C(\cdot)$ une constante qui dépend de σ^2 , σ_e^2 et σ_0^2 .

Nous allons maintenant détailler les étapes E et M de l'algorithme EM.

Etape E :

Cette étape consiste à prendre l'espérance mathématique de la log-vraisemblance des données complètes $\ln(P(\mathbf{z}; \boldsymbol{\tau}))$ par rapport à la loi conditionnelle de \mathbf{a} sachant \mathbf{y} et le $\boldsymbol{\tau}$ pris à sa valeur courante $\boldsymbol{\tau}^{(p)}$ soit

$$Q(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\tau}^{(p)}) \stackrel{\text{def}}{=} E(\ln P(\mathbf{z}; \boldsymbol{\tau}) | \mathbf{y}, \mathbf{a}; \boldsymbol{\tau}^{(p)}). \quad (20)$$

Puisque les paramètres $(\sigma^2, \sigma_e^2, \sigma_0^2)$ sont supposés connus, nous montrons dans l'annexe 1 que la fonction $Q(\cdot, \cdot)$ peut s'exprimer sous la forme suivante :

$$Q(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\tau}^{(p)}) = -\frac{1}{\sigma^2} \sum_{n=1}^N (\text{Tr}((\mathbf{y}_n - \mathbf{G}_n(\boldsymbol{\tau}) \hat{\mathbf{a}}_{n|N}^{(p)})(\mathbf{y}_n - \mathbf{G}_n(\boldsymbol{\tau}) \hat{\mathbf{a}}_{n|N}^{(p)})^H) + \text{Tr}(\mathbf{G}_n^H(\boldsymbol{\tau}) \mathbf{S}_{n|N}^{(p)} \mathbf{G}_n(\boldsymbol{\tau}))) \quad (21)$$

où les estimées à la p -ième itération de la moyenne $E(\mathbf{a}_n | \mathbf{y}, \mathbf{a}; \boldsymbol{\tau}^{(p)})$ et de la matrice de corrélation $E((\mathbf{a}_n - \hat{\mathbf{a}}_{n|N}^{(p)})(\mathbf{a}_n - \hat{\mathbf{a}}_{n|N}^{(p)})^H | \mathbf{y}; \boldsymbol{\tau}^{(p)})$ sont notées respectivement par $\hat{\mathbf{a}}_{n|N}^{(p)} \stackrel{\text{def}}{=} E(\mathbf{a}_n | \mathbf{y}, \mathbf{a}; \boldsymbol{\tau}^{(p)})$ et $\mathbf{S}_{n|N}^{(p)} \stackrel{\text{def}}{=} E((\mathbf{a}_n - \hat{\mathbf{a}}_{n|N}^{(p)})(\mathbf{a}_n - \hat{\mathbf{a}}_{n|N}^{(p)})^H | \mathbf{y}, \mathbf{a}; \boldsymbol{\tau}^{(p)})$ et peuvent être obtenues par application d'un lisseur de Kalman («Kalman smoother» en anglais) [15, 14] en utilisant l'estimé $\boldsymbol{\tau}^{(p)}$ obtenu à l'itération p . L'algorithme lissage de Kalman procède en deux étapes : récursion avant (ou Forward) et récursion arrière (ou Backward) données par :

Récursion avant (ou Forward) : Filtre de Kalman

$$\hat{\mathbf{a}}_{n+1|n}^{(p)} = \gamma \hat{\mathbf{a}}_n^{(p)}$$

$$\mathbf{S}_{n+1|n}^{(p)} = \gamma^2 \mathbf{S}_n^{(p)} + \sigma_e^2 I$$

$$\mathbf{K}_{n+1} = \mathbf{S}_{n+1|n}^{(p)} \mathbf{G}_n^H(\boldsymbol{\tau}^{(p)}) (\sigma_n^2 \mathbf{I} + \mathbf{G}_n(\boldsymbol{\tau}^{(p)}) \mathbf{S}_{n+1|n}^{(p)} \mathbf{G}_n^H(\boldsymbol{\tau}^{(p)}))^{-1}$$

$$\hat{\mathbf{a}}_{n+1}^{(p)} = \hat{\mathbf{a}}_{n+1|n}^{(p)} + \mathbf{K}_{n+1} (\mathbf{y}_n - \mathbf{G}_n(\boldsymbol{\tau}^{(p)}) \hat{\mathbf{a}}_{n+1|n}^{(p)})$$

$$\mathbf{S}_{n+1}^{(p)} = \mathbf{S}_{n+1|n}^{(p)} - \mathbf{K}_{n+1} \mathbf{G}_n(\boldsymbol{\tau}^{(p)}) \mathbf{S}_{n+1|n}^{(p)} \quad (22)$$

Récursion arrière (ou Backward) :

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{n-1} &= \boldsymbol{\gamma} \mathbf{S}_{n-1}^{(p)} \mathbf{S}_{n|n-1}^{(p)-1} \\ \hat{\mathbf{a}}_{n-1|N}^{(p)} &= \hat{\mathbf{a}}_{n-1}^{(p)} \mathbf{J}_{n-1} (\hat{\mathbf{a}}_{n|N}^{(p)} - \boldsymbol{\gamma} \hat{\mathbf{a}}_{n-1}^{(p)}) \\ \mathbf{S}_{n-1|N}^{(p)} &= \mathbf{S}_{n-1}^{(p)} + \mathbf{J}_{n-1} (\mathbf{S}_{n|N}^{(p)} - \mathbf{S}_{n|n-1}^{(p)}) \mathbf{J}_{n-1}^H \\ \mathbf{S}_{n,n-1|N}^{(p)} &= \mathbf{S}_n^{(p)} \mathbf{J}_{n-1}^H + \mathbf{J}_n (\mathbf{S}_{n+1,n|N}^{(p)} - \boldsymbol{\gamma} \mathbf{S}_n^{(p)}) \mathbf{J}_{n-1}^H \end{aligned} \quad (23)$$

Etape M : Cette étape consiste à ré-estimer le paramètre $\boldsymbol{\tau}$ par maximisation de $Q(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\tau}^{(p)})$

$$\boldsymbol{\tau}^{(p+1)} = \text{Arg max}_{\boldsymbol{\tau}} Q(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\tau}^{(p)}) \quad (24)$$

Nous faisons maintenant quelques commentaires sur la mise en oeuvre de cette procédure.

Nous remarquons que l'étape de maximisation est effectuée seulement par rapport au paramètre du retard. Ceci simplifie grandement l'algorithme proposé. En effet, une fois que le retard est estimé, les paramètres des gains complexes sont obtenus par application du lisseur de Kalman via les récursions avant et arrière. La seule étape sensible est donc la recherche du minimum en $\boldsymbol{\tau}^{(p)}$. Un algorithme du gradient peut par exemple être utilisé à cette fin.

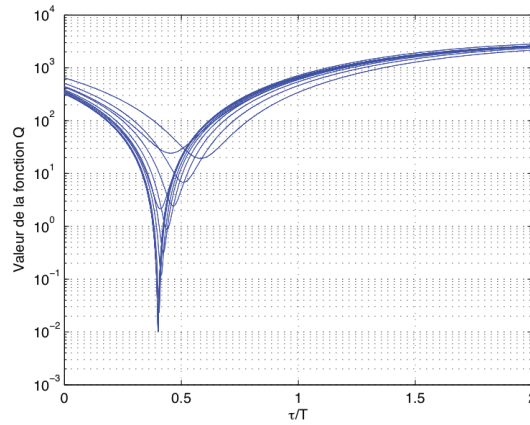


Figure 6: Fonction de coût $-Q(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\tau}^{(p)})$ -Canal mono-trajet, GMSK avec $BT = 0.3$ et $L = 4$, et séquence transmise de symboles BPSK i.i.d. de taille $N = 200$.

La figure 6 représente l'allure de la fonction de coût (21) à chaque itération de l'algorithme initialisé à $\tau/T = 0.58$, dans le cas particulier d'un canal mono-trajet. On remarque que la fonction de coût a un seul minimum à chaque réalisation, et que le minimum est bien atteint au voisinage de $\tau/T = 0.4$ après 15 itérations de l'algorithme.

6 Estimateur du maximum à postérieur

Dans cette section, nous supposons que les statistiques du canal sont connues; c'est-à-dire que le vecteur des gains de chaque trajet $\mathbf{a}_l \stackrel{\text{def}}{=} (\alpha_{l,0}, \dots, \alpha_{l,N-1})^T$ généré selon le modèle de Jakes ou AR d'ordre 1 sont gaussiens complexes circulaires centrés de matrice de corrélation $\mathbf{R}_a^{(l)} \stackrel{\text{def}}{=} E(\mathbf{a}_l \mathbf{a}_l^H)$.

Nous commençons tout d'abord par présenter les notations requises pour développer l'estimateur du maximum a posteriori (MAP). Nous notons que le vecteur \mathbf{y} peut s'écrire sous cette forme :

$$\mathbf{y} = \mathbf{G}(\boldsymbol{\tau})\mathbf{a} + \mathbf{b}$$

où $\mathbf{b} = (\mathbf{b}_0^T, \dots, \mathbf{b}_{N-1}^T)^T$, $\mathbf{a} \stackrel{\text{def}}{=} (\mathbf{a}_1^T, \dots, \mathbf{a}_{L_c}^T)^T$ et $\mathbf{G}(\boldsymbol{\tau}) \stackrel{\text{def}}{=} (\mathbf{G}_1(\tau_1), \dots, \mathbf{G}_{L_c}(\tau_{L_c}))$ et où $\mathbf{a}_l = (\alpha_{l,0}, \dots, \alpha_{l,N-1})^T$ et $\mathbf{G}_l(\tau_l) = \text{Diag}(g_0(\tau_l), \dots, g_{N-1}(\tau_l))$ pour tout $l = 1, \dots, L_c$

Puisque les symboles sont supposés connus, le vecteur \mathbf{y} est centré gaussien complexe circulaire de matrice de covariance donnée par :

$$\mathbf{R}_y \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{G}(\boldsymbol{\tau})\mathbf{R}_a\mathbf{G}^H(\boldsymbol{\tau}) + \sigma^2\mathbf{I}$$

Puisque les vecteurs \mathbf{a}_l sont indépendants pour tout $l = 1, \dots, L_c$, la matrice \mathbf{R}_a est diagonale par blocs et est donnée par :

$$\mathbf{R}_a = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_a^{(1)} & O & \dots & O \\ O & \mathbf{R}_a^{(2)} & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & O & \mathbf{R}_a^{(L_c)} \end{pmatrix}$$

où

$$\mathbf{R}_a^{(l)}(n, n-k) = \begin{cases} \sigma_a^{(l)} J_0(2\pi f_a T k), & \text{pour Mod\`ele de Jakes} \\ \sigma_a^{(l)} \gamma^{k|l}, & \text{pour Mod\`ele AR d'ordre 1} \end{cases}$$

Estimateur du maximum a posteriori

Nous considérons ici l'approche bayésienne basée sur l'estimateur du maximum a posteriori (MAP) pour estimer le paramètre τ et le canal. les estimées du MAP de \mathbf{t} et de \mathbf{a} sont obtenues en maximisant la fonction suivante :

$$\begin{aligned} \{\hat{\tau}, \hat{\alpha}\} &= \arg \max_{\tau, \alpha} P(\alpha | y; \tau) \\ &= \arg \max_{\tau, \alpha} P(y | \tau; \alpha) P(\alpha) \\ &= \arg \min_{\tau, \alpha} \frac{1}{\sigma^2} \|\mathbf{y} - \mathbf{G}(\tau)\alpha\|^2 + \alpha^H \mathbf{R}_\alpha \alpha \end{aligned} \quad (25)$$

Pour une valeur de τ fixe, l'estimé du canal $\hat{\alpha}$ qui minimise la fonction du coût (25) est donnée par:

$$\hat{\alpha} = \left(\mathbf{G}^H(\tau) \mathbf{G}(\tau) + \sigma^2 \mathbf{R}_\alpha^{-1} \right)^{-1} \mathbf{G}^H(\tau) \mathbf{y} \quad (26)$$

qui est également l'estimé du minimum de l'erreur quadratique moyenne (MMSE) de α . En substituant (26) dans (25) et après quelques manipulation des calculs, on obtient la fonction du coût suivante qui ne dépend que de τ

$$\hat{\tau} = \arg \max_{\tau} g(\tau) \quad (27)$$

où

$$g(\tau) = \mathbf{y}^H \mathbf{G}(\tau) \left(\mathbf{G}^H(\tau) \mathbf{G}(\tau) + \sigma^2 \mathbf{R}_\alpha^{-1} \right)^{-1} \mathbf{G}^H(\tau) \mathbf{y} \quad (28)$$

La maximisation de la fonction (28) peut être effectuée avec des techniques d'optimisation itérative.

Remarque 1

1. Il n'y a pas de problème d'identifiabilité dû à la régularité de la matrice $\mathbf{G}^H(\tau) \mathbf{G}(\tau) + \sigma^2 \mathbf{R}_\alpha^{-1}$ dont dépend la fonction $g(\cdot)$.

2. Maximiser la fonction $g(\cdot)$ est équivalent à minimiser $\mathbf{y}^H \mathbf{R}_y^{-1} \mathbf{y}$ qui maximise la fonction de vraisemblance $P(\mathbf{y} | \tau)$. Par conséquent, nous déduisons avec cette approche bayésienne que les estimées des paramètres $\hat{\tau}$ et $\hat{\alpha}$ sont obtenues sous une forme séparable tel que l'estimée $\hat{\tau}$ peut être obtenue par ML et ensuite l'estimée $\hat{\alpha}$ peut être obtenue via MAP ou MMSE.

7 Analyse de performance

Dans cette section, nous proposons d'évaluer la performance de l'algorithme proposé en terme d'erreur quadratique moyenne (EQM) sur le paramètre $\boldsymbol{\theta}$. Nous comparons également l'EQM à la borne de référence donnée par la borne de Cramér Rao Hybride modifiée (MHCRB) que nous calculons dans la sous-section suivante :

7.1 MHCRB

Nous nous plaçons ici dans le cas particulier d'un canal mono-trajet ($L_C = 1$) et dans le contexte où la séquence des symboles binaires \mathbf{a} est stochastique i.i.d. équiprobable. Dans ce cas, en remplaçant α_n et $G_n(\boldsymbol{\tau})$ respectivement par α_n et $\mathbf{g}_n(\boldsymbol{\tau})$, le modèle d'état (17) devient :

$$\begin{cases} \alpha_n &= \gamma_{\alpha_{n-1}} + e_n \\ \mathbf{y}_n &= \alpha_n \mathbf{g}_n(\boldsymbol{\tau}) + \mathbf{b}_n. \end{cases} \quad (29)$$

Puisque le paramètre $\boldsymbol{\theta} \stackrel{\text{def}}{=} (\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\alpha}^T)^T$ contient des paramètres déterministes $\boldsymbol{\tau}$ et aléatoires $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_0, \dots, \alpha_N)^T$ qui sont indépendants d'après le modèle d'état, nous proposons ici de calculer la borne MHCRB qui est simple à calculer. Nous notons que la vraie expression de la borne de Cramér Rao hybride (HCRB) [17, 18] qui généralise la borne de Cramér Rao stochastique (CRB) [20, 19] et la borne de Cramér Rao Bayésienne (BCRB) [16], est difficile à obtenir dans le cas de notre modèle (29) car la fonction de densité de probabilité (PDF) de y sachant $\boldsymbol{\alpha}$ est difficile à calculer.

L'expression générale de le HCRB est donnée par l'inverse de la matrice d'information Hybride (HFIM) [18, rel. (3)] :

$$\text{HCRB}(\boldsymbol{\theta}) = I^{-1} \quad (30)$$

$$I \stackrel{\text{def}}{=} E_{\boldsymbol{\alpha}} E_{y|\boldsymbol{\alpha}} \left(-\frac{\partial^2 \ln f(y|\boldsymbol{\alpha})}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}^H} \right) + \begin{pmatrix} 0 & 0^T \\ 0 & E_{\boldsymbol{\alpha}} \left(-\frac{\partial^2 \ln g(\boldsymbol{\alpha})}{\partial \boldsymbol{\alpha} \partial \boldsymbol{\alpha}^H} \right) \end{pmatrix}$$

En plus de la raison évoquée ci-dessus, la fonction $f(y|\boldsymbol{\alpha}) = E_{\mathbf{a}} f(y|\boldsymbol{\alpha}, \mathbf{a})$ est difficile à calculer analytiquement, ce qui complique le calcul de cette borne. Cependant, la borne de Cramér Rao hybride modifiée (MHCRB) est simple à calculer, elle est donnée par l'inverse de la matrice d'information Hybride modifiée (MHFIM)

$$\text{HCRB}(\boldsymbol{\theta}) = I_h^{-1} \quad (31)$$

$$I_h \stackrel{\text{def}}{=} E_a E_a E_{y|a} \left(-\frac{\partial^2 \ln f(y|\mathbf{a}, a)}{\partial \boldsymbol{\theta} \partial \boldsymbol{\theta}^H} \right) + \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0}^T \\ 0 & E_a \left(-\frac{\partial^2 \ln g(\mathbf{a})}{\partial \mathbf{a} \partial \mathbf{a}^H} \right) \end{pmatrix}$$

où

$$g(\mathbf{a}) \stackrel{\text{def}}{=} P(\boldsymbol{\alpha}_0) \prod_{n=1}^N g(\boldsymbol{\alpha}_n | \boldsymbol{\alpha}_{n-1})$$

$$f(y|\mathbf{a}, \mathbf{a}) \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{n=1}^N f(y_n | \boldsymbol{\alpha}_n, \mathbf{a})$$

Grâce à la gaussianité des bruits b_n et e_n , nous avons

$$f(y_n | \boldsymbol{\alpha}_n, \mathbf{a}) = \frac{1}{\pi^M \sigma^{2M}} e^{-\frac{\|y_n - \boldsymbol{\alpha}_n g_n(\boldsymbol{\tau})\|^2}{\sigma^2}} \quad (32)$$

$$g(\boldsymbol{\alpha}_n | \boldsymbol{\alpha}_{n-1}) = \frac{1}{\pi \sigma_e^2} e^{-\frac{\|\boldsymbol{\alpha}_n - \boldsymbol{\alpha}_{n-1}\|^2}{\sigma_e^2}} \quad (33)$$

Nous démontrons dans l'annexe 2 le résultat suivant :

Résultat 1 Les paramètres gains et retard de $\boldsymbol{\theta}$ sont découplés dans la MHFIM dans le cas du signal CPM affecté par un bruit blanc additif, gaussien complexe circulaire, et celle-ci est donnée par :

$$\mathbf{I}_h = \begin{pmatrix} \mathbf{I}_{(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\tau})} & 0 \\ 0 & \mathbf{I}_{(\mathbf{a}, \mathbf{a})} + \mathbf{B} \end{pmatrix}$$

où $I_{(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\tau})} = 8\pi^2 h^2 N \rho \xi(\boldsymbol{\tau})$,

$$\mathbf{I}_{(\alpha, \alpha)} = \frac{M}{\sigma^2} \mathbf{I} \text{ et } \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \frac{1+\gamma^2}{\sigma_e^2} - \mathbb{E}_{\alpha(0)} \left(\frac{\partial^2 \ln P(\alpha(0))}{\partial \alpha(0) \partial \alpha(0)^*} \right) & -\frac{\gamma}{\sigma_e^2} & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{\gamma}{\sigma_e^2} & \frac{1+\gamma^2}{\sigma_e^2} & -\frac{\gamma}{\sigma_e^2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & -\frac{\gamma}{\sigma_e^2} & \frac{1+\gamma^2}{\sigma_e^2} & -\frac{\gamma}{\sigma_e^2} \\ 0 & \dots & 0 & -\frac{\gamma}{\sigma_e^2} & -\frac{1}{\sigma_e^2} \end{pmatrix}$$

et où $\rho \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sigma_a^2}{\sigma^2}$ est le SNR et $\xi(\tau) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{L-1} g^2(mT_e + jT - \tau)$.

Par conséquent

$$MHCRB(\tau) = \frac{1}{8\pi^2 h^2 N \xi(\tau)} \frac{1}{\rho} \quad (34)$$

$$MHCRB(\alpha) = \left(\frac{M}{\sigma^2} + B \right)^{-1} \quad (35)$$

Nous remarquons que la $MHCRB(\tau)$ est inversement proportionnelle à ρ , et dépend de l'indice de modulation h , du filtre de mise en forme $g(\cdot)$ et de la longueur de corrélation L . En conséquence, $MHCRB(\tau)$ reste valable pour tous les signaux CPM. Cette expression est également similaire à l'expression de la MCRB dérivée dans [22, rel. (2.4.54)]. Enfin, nous remarquons que la $MHCRB(\alpha)$ ne dépend pas du paramètre τ .

7.2 Simulations

Dans cette section, nous présentons des exemples numériques pour illustrer les performances de l'algorithme proposé pour estimer conjointement les retards et les gains complexes du canal multi-trajets. Ces performances sont évaluées en termes d'erreur quadratique moyenne (EQM) sur les paramètres à estimer. A titre de courbe de référence, nous avons donc choisi de calculer les bornes de Cramér-Rao hybrides modifiées comme courbe de référence associées aux différents paramètres à estimer. Ces bornes sont calculés dans le cas particulier d'un canal mon trajet, et qui constituent une borne inférieure sur les erreurs quadratique moyennes. Nous supposons que la CPM binaire émis est de type GMSK avec $BT = 0.3$, l'indice de modulation $h = \frac{1}{2}$ et la longueur de corrélation $L = 4$. Ces paramètres sont ceux des systèmes GSM.

	données	séquence apprentissage	données	
3	58	26	58	3

Table 1: 1 slot GSM : 148 bits

Le tableau 1 décrit la composition d'un slot GSM. Les trois premiers et les trois derniers bits du slot servent à la synchronisation. Il y a 2×58 bits de données utiles dans chaque slot. Les 26 bits du milieu sont une séquence pseudo-aléatoire connue du récepteur permettant de réduire les déformations du canal de transmission.

Dans ces simulations, nous considérons un canal mono-trajet ou à deux trajets simulés selon le modèle de Jakes [10, 14] avec un produit fréquence doppler-temps $f_d T_s = 0.000738$, qui correspond pour une fréquence porteuse de 1,8 GHz, à une vitesse du mobile 120 km/h et un taux de transmission de $\frac{1}{T_s} = 270$ kb/s. Un processus AR d'ordre 1 avec un coefficient connu $\gamma = 0,99999$ (qui correspond à la variation lente du canal imposée par $f_d T_s$) est utilisé pour modéliser la variation des gains complexes du canal. Les 148 symboles $\{a_n\}$ sont supposés connus à la réception, le facteur de suréchantillonnage M est égal à $M = 8$, et la valeur fixe du retard inconnu normalisé est égal à $\frac{\tau}{T_s} = 0.4$. Enfin, le nombre de réalisation de Monte Carlo est fixé à 1000.

Cas d'un canal mono trajet

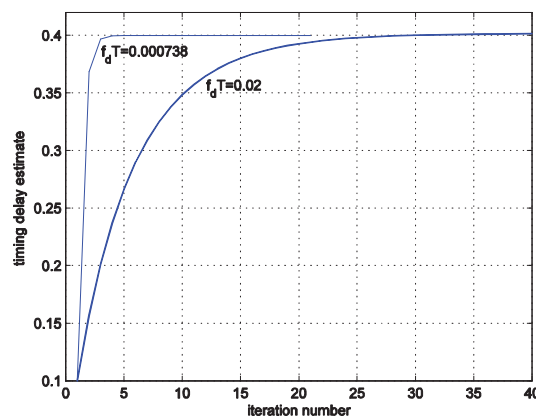


Figure 7: Trajectoire de l'algorithme EM pour deux valeurs de $f_d T_s$ avec $SNR = 30$ dB.

La figure 7 montre une réalisation de l'estimation récursive du retard normalisé par T_s obtenu avec l'algorithme EM en fonction du nombre d'itérations pour un SNR de $30dB$. Sur cette figure l'algorithme est initialisé avec $\tau / T_s = 0.1$. Cette figure montre que l'algorithme EM converge vers une valeur proche de la vraie valeur assez rapidement dans le cas d'un canal à évanouissement lent. Nous notons que l'algorithme EM continue à donner des estimées valides de τ lorsque $f_d T_s > 0.001$. Toutefois, dans ce cas, l'algorithme EM converge après 30 itérations comme montré sur la figure avec $f_d T_s = 0,02$.

La figure 8 représente l'histogramme des réalisations de l'estimée du retard normalisé par l'algorithme EM initialisé avec la méthode de corrélation, sans exclure les fausses détections dues aux erreurs d'estimation des gains complexes. Nous remarquons que la très grande majorité des réalisations de l'estimée du retard se trouve au voisinage de $\tau / T = 0.4$.

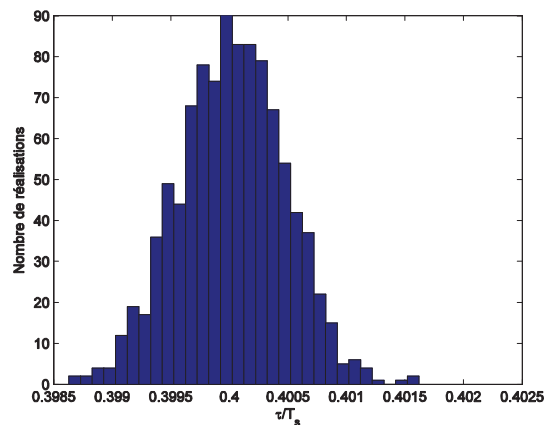


Figure 8: Histogramme des estimées du retard obtenues par l'algorithme EM (15 itérations) sur 1000 réalisations avec $f_d T_s = 0.000738$ et $SNR = 30dB$

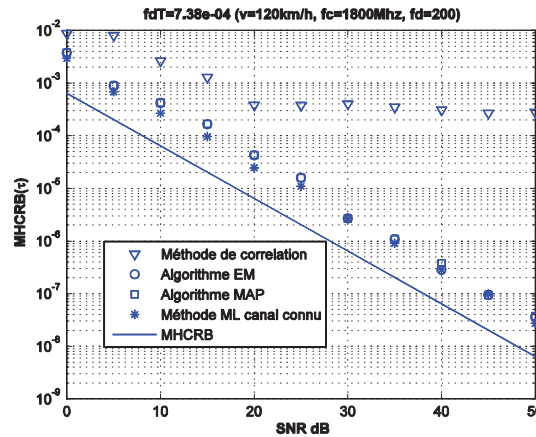


Figure 9: $MHCRB(\tau) / T_s^2$ et erreur quadratique estimée normalisée $E(\hat{\tau} - \tau)^2 / T_s^2$ donnée par l'algorithme EM (10 itérations), la méthode de corrélation et la méthode du MV avec connaissance parfaite des gains avec $f_d T_s = 0.000738$, en fonction du SNR.

La figure 9 compare la $MHCRB(\tau) / T_s^2$ (donnée par (34)) avec l'EQM sur le retard normalisé (i.e. $E(\hat{\tau} - \tau)^2 / T_s^2$) donnée par l'algorithme EM initialisé par la méthode de corrélation, la méthode de corrélation, et l'algorithme MAP, en fonction du SNR. Pour éclaircir cette comparaison, nous avons également calculé l'EQM donnée par la méthode MV dans le cas particulier de connaissance parfaite des gains complexes, qui peut être considéré comme une borne de référence. On observe que l'EQM obtenue en utilisant les estimées des gains complexes est proche de l'EQM de référence obtenue en supposant que ces gains sont parfaitement connus. Nous observons également que l'algorithme EM et l'algorithme MAP ont presque les mêmes performances et surpassent la méthode de corrélation basée sur la maximisation de la fonction d'ambiguïté délai-doppler. D'autre part, les performances de l'algorithme EM et de l'algorithme MAP sont proches de la MHCRB contrairement à celle de la méthode de corrélation.

La figure 10 compare l'EQM sur les gains complexe $E(\|\hat{\alpha} - \alpha\|^2)$ donnée par l'algorithme EM, l'algorithme MAP et par l'algorithme du filtre de Kalman avec une connaissance parfaite du retard, avec la $MHCRB(\alpha)$ donnée par (35), en fonction du SNR. Nous voyons que la performance de l'algorithme EM, de l'algorithme MAP et de l'algorithme lissage de Kalman sont très proches, et que leurs estimées atteignent la MHCRB lorsque le SNR augmente. Nous rappelons que à faible SNR la CRB modifiée est en générale inférieure à la vraie CRB et qui n'est pas atteint par un algorithme.

LURGA

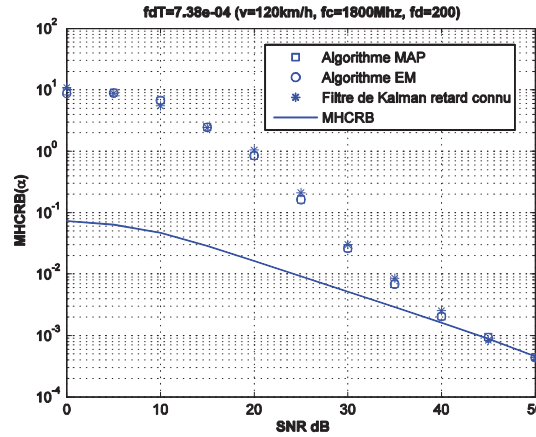


Figure 10: $MHCRB(\alpha) / T_s^2$, et erreur quadratique estimée normalisée $\frac{1}{N} E(\|\hat{\alpha} - \alpha\|^2)$ donnée par l'algorithme EM (10 itérations), et l'algorithme de lissage de Kalman avec connaissance parfaite du retard avec $f_d T_s = 0.000738$, en fonction du SNR.

La figure 11 compare l'EQM sur le retard normalisé $E(\hat{\tau} - \tau)^2 / T_s^2$ donnée par l'algorithme EM et par la méthode de corrélation, en fonction du produit $f_d T_s$ avec $SNR = 30dB$. On observe que l'EQM associée à l'algorithme EM et à l'algorithme MAP sont presque identiques, et qui restent presque constante contrairement à l'EQM donnée par la méthode de corrélation qui augmente quand $f_d T_s$ augmente.

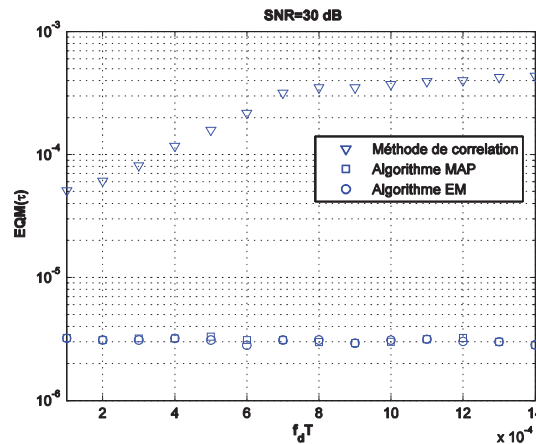


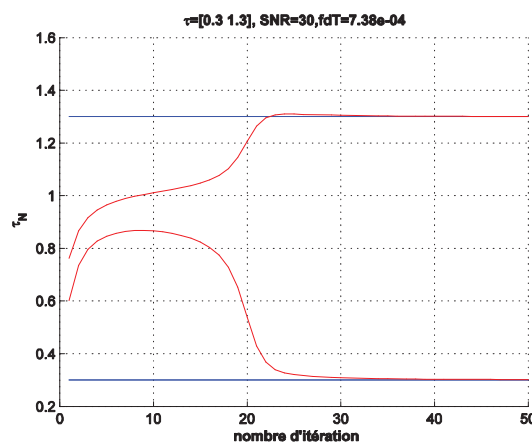
Figure 11: Erreur quadratique estimée normalisée $E(\hat{\tau} - \tau)^2 / T_s^2$ donnée par l'algorithme EM (10 itérations), l'algorithme MAP et la méthode de corrélation avec $SNR = 30$ dB en fonction du produit $f_d T_s$.

Cas d'un canal multi-trajets

Dans ce paragraphe, nous présentons quelques figures illustrent les performances de l'algorithme EM et de l'algorithme MAP dans le cas particulier d'un canal à deux ou à trois trajets. Les vecteur des gains de chaque trajet $\mathbf{a}_l \stackrel{\text{def}}{=} (\alpha_{l,0}, \dots, \alpha_{l,N-1})^T$ pour $l = 1, \dots, L_c$, sont supposés indépendants. Comme il n'y pas d'algorithme de référence proposé dans la littérature, les deux algorithmes sont initialisés au voisine des vraies valeurs.

La figure 12 montre une réalisation de l'estimation conjointe récursive des retards normalisés par T_s obtenus avec l'algorithme EM en fonction du nombre d'itérations pour un SNR de 30dB. Cette figure montre que l'algorithme EM converge vers une valeur proche de la vraie valeur $\frac{1}{T_s} \boldsymbol{\tau} = [0.3, 1.3]$ après 32 itérations. Cependant, pour des faibles valeurs de $\Delta \boldsymbol{\tau} = |\boldsymbol{\tau}_2 - \boldsymbol{\tau}_1| \ll 1$, l'algorithme EM demandera un nombre d'itération très grand (à l'ordre de 100 itérations) pour atteindre des estimations correctes des paramètres. Nous avons observé ce même comportement lorsque le nombre de trajets est supérieur à deux comme la montre la figure 13 pour un canal de trois trajets avec des vrais retards $\frac{1}{T_s} \boldsymbol{\tau} = [0.3, 1.7, 2.7]$.

La figure 14 compare l'EQM sur les retards normalisés (i.e. $E \|\hat{\boldsymbol{\tau}} - \boldsymbol{\tau}\|^2 / T_s^2$) donnée par l'algorithme EM et l'algorithme MAP initialisés avec $\boldsymbol{\tau}^{(0)} = [0.6, 0.75]$, et la méthode MV dans le cas particulier de connaissance parfaite des gains complexes du canal, en fonction du SNR. Nous remarquons d'une part que l'algorithme EM et l'algorithme MAP ont presque les mêmes performances. D'autre part, les performances des deux algorithmes approchent celle de l'algorithme MV avec connaissance parfaite des gains complexes de chaque trajet.



LURGA

Figure 12: Trajectoire de l'algorithme EM avec deux trajets pour SNR = 30 dB.

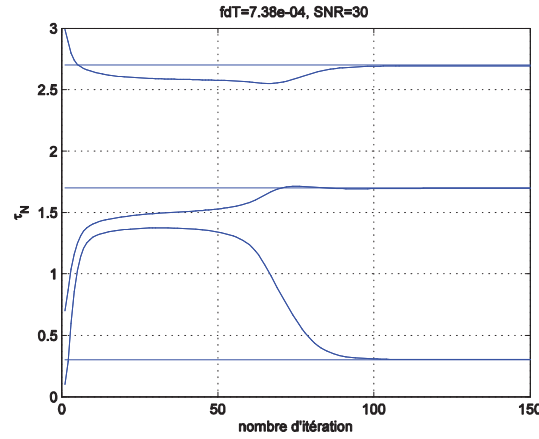


Figure 13: Trajectoire de l'algorithme EM avec trois trajets initialisé avec $\frac{1}{T_s} \tau = [0.1, 0.7, 2.99]$ pour SNR = 30 dB.

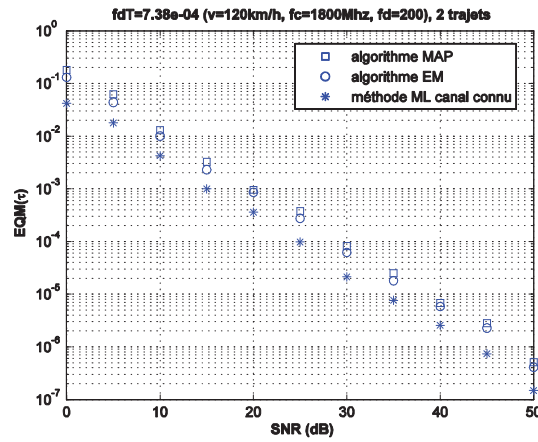


Figure 14: Erreur quadratique estimée normalisée $E(\|\hat{\tau} - \tau\|^2 / T_s^2)$ donnée par l'algorithme EM (35 itérations), l'algorithme MAP et la méthode MV avec connaissance parfaite du gains de chaque trajet en fonction du SNR avec $\frac{1}{T_s} \tau = [0.3, 1.3]$.

Sensibilité au point d'initialisation

Afin d'obtenir les résultats précédents, nous avons supposé qu'une estimée préalable du retard était disponible, permettant ainsi de s'affranchir du problème des fausses détections. En effet, le problème majeur des algorithmes de type EM tel que celui proposé ici est lié à la sensibilité des performances au choix du point d'initialisation.

Nous avons remarqué que pour des valeurs de SNR supérieures à 30dB, l'algorithme EM converge vers une valeur très proche de la vraie valeur même s'il est initialisé avec des valeurs du retard tirées d'une façon aléatoire dans l'intervalle $[0, L_d T]$ avec $L_d = L + \lfloor \frac{\tau_{max}}{T_e} \rfloor$. Par ailleurs, dans le cas de faible SNR, un algorithme sous optimal est exigé pour initialiser l'algorithme EM afin d'éviter les fausses détections. Dans ce rapport nous avons utilisé la méthode de corrélation pour initialiser l'algorithme EM.

8 Annexe du document principal

8.1 Annexe 1 : Preuve de (21)

$$\begin{aligned} \ln(P(\mathbf{z}; \boldsymbol{\tau})) = & C(\boldsymbol{\sigma}^2, \boldsymbol{\sigma}_e^2, \boldsymbol{\sigma}_0^2) - \frac{1}{\boldsymbol{\sigma}^2} \sum_{n=1}^N \| \mathbf{y}_n - \mathbf{G}_n(\boldsymbol{\tau}) \mathbf{a}_n \|^2 \\ & - \frac{1}{\boldsymbol{\sigma}_e^2} \sum_{n=1}^N \| \mathbf{a}_n - \gamma \mathbf{a}_{n-1} \|^2 - \frac{1}{\boldsymbol{\sigma}_0^2} \| \mathbf{a}_0 \|^2, \end{aligned} \quad (36)$$

Puisque les paramètres $\boldsymbol{\sigma}^2$, $\boldsymbol{\sigma}_e^2$ et $\boldsymbol{\sigma}_0^2$ sont supposés connus et que le deuxième terme de (36) ne dépend pas de $\boldsymbol{\tau}$, ces termes peuvent être supprimés dans la fonction $\ln(P(\mathbf{z}; \boldsymbol{\tau}))$, on obtient

$$\begin{aligned} \ln(P(\mathbf{z}; \boldsymbol{\tau})) = & - \frac{1}{\boldsymbol{\sigma}^2} \sum_{n=1}^N \| \mathbf{y}_n - \mathbf{G}_n(\boldsymbol{\tau}) \mathbf{a}_n \|^2 \\ = & - \frac{1}{\boldsymbol{\sigma}^2} \sum_{n=1}^N \text{Tr}((\mathbf{y}_n - \mathbf{G}_n(\boldsymbol{\tau}) \mathbf{a}_n)(\mathbf{y}_n - \mathbf{G}_n(\boldsymbol{\tau}) \mathbf{a}_n)^H) \\ = & - \frac{1}{\boldsymbol{\sigma}^2} \sum_{n=1}^N \text{Tr}(\mathbf{y}_n \mathbf{y}_n^H + \mathbf{G}_n(\boldsymbol{\tau}) \mathbf{a}_n \mathbf{a}_n^H \mathbf{G}_n^H(\boldsymbol{\tau}) - \mathbf{y}_n \mathbf{a}_n^H \mathbf{G}_n(\boldsymbol{\tau}) - \mathbf{G}_n(\boldsymbol{\tau}) \mathbf{a}_n \mathbf{y}_n^H) \end{aligned} \quad (37)$$

En prenant l'espérance par rapport à la loi de \mathbf{a} sachant \mathbf{y} , la fonction $Q(\cdot, \cdot)$ définie par (20) peut s'exprimer sous cette forme :

$$Q(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\tau}^{(p)}) \stackrel{\text{def}}{=} E(\ln P(\mathbf{z}; \boldsymbol{\tau}) | \mathbf{y}, \mathbf{a}; \boldsymbol{\tau}^{(p)})$$

$$= -\frac{1}{\sigma^2} \sum_{n=1}^N \text{Tr}(\mathbf{y}_n \mathbf{y}_n^H + \mathbf{G}_n(\boldsymbol{\tau}) \mathbb{E}(\mathbf{a}_n \mathbf{a}_n^H | \mathbf{y}; \boldsymbol{\tau}^{(p)}) \mathbf{G}_n^H(\boldsymbol{\tau}) \quad (38)$$

$$- \mathbf{y}_n \mathbb{E}(\mathbf{a}_n | \mathbf{y}; \boldsymbol{\tau}^{(p)})^H \mathbf{G}_n(\boldsymbol{\tau}) - \mathbf{G}_n(\boldsymbol{\tau}) \mathbb{E}(\mathbf{a}_n | \mathbf{y}; \boldsymbol{\tau}^{(p)}) \mathbf{y}_n^H).$$

Or

$$\hat{\mathbf{a}}_{n|N}^{(p)} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}(\mathbf{a}_n | \mathbf{y}, \mathbf{a}; \boldsymbol{\tau}^{(p)}) \quad (39)$$

$$S_{n|N}^{(p)} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}((\mathbf{a}_n - \hat{\mathbf{a}}_{n|N}^{(p)})(\mathbf{a}_n - \hat{\mathbf{a}}_{n|N}^{(p)})^H | \mathbf{y}, \mathbf{a}; \boldsymbol{\tau}^{(p)}) = \mathbb{E}(\mathbf{a}_n \mathbf{a}_n^H | \mathbf{y}; \boldsymbol{\tau}^{(p)}) - \hat{\mathbf{a}}_{n|N}^{(p)} \hat{\mathbf{a}}_{n|N}^{(p)H} \quad (40)$$

En utilisant (39) et (40), on obtient la fonction $Q(\cdot; \cdot)$ donnée par (21).

8.2 Annexe 2 : Preuve du résultat 1 (pour la borne MHCRB)

Nous commençons par calculer la première matrice de la MHFIM donnée par la relation (32). En supprimant le terme constant, la log-PDF de $f(\mathbf{y} | \mathbf{a}, \mathbf{a})$ est donnée par :

$$\ln(f(\mathbf{y} | \mathbf{a}, \mathbf{a})) = -\frac{1}{\sigma^2} \sum_{n=1}^N \|\mathbf{y}_n - \mathbf{g}_n(\boldsymbol{\tau}) \mathbf{a}_n\|^2 \quad (41)$$

Pour obtenir les dérivées partielles secondes par rapport à $\boldsymbol{\theta}$, on dérive deux fois l'expression (41) par rapport à $\boldsymbol{\tau}$ et \mathbf{a}_n , on obtient :

$$\frac{\partial^2 \ln(f(\mathbf{y} | \mathbf{a}, \mathbf{a}))}{\partial \boldsymbol{\tau} \partial \boldsymbol{\tau}} = -\frac{2}{\sigma^2} \sum_{n=1}^N \{\Re(\mathbf{a}_n^* \mathbf{g}_n'^H(\boldsymbol{\tau}) \mathbf{g}_n'(\boldsymbol{\tau}) \mathbf{a}_n) - \Re(\mathbf{a}_n^* \mathbf{g}_n^H(\boldsymbol{\tau}) (\mathbf{y}_n - \mathbf{g}_n(\boldsymbol{\tau}) \mathbf{a}_n))\}$$

$$\frac{\partial^2 \ln(f(\mathbf{y} | \mathbf{a}, \mathbf{a}))}{\partial \mathbf{a}_n \partial \mathbf{a}_m^*} = -\frac{1}{\sigma^2} \mathbf{g}_n^H(\boldsymbol{\tau}) \mathbf{g}_n(\boldsymbol{\tau}) \delta_{nm}$$

$$\frac{\partial^2 \ln(f(\mathbf{y} | \mathbf{a}, \mathbf{a}))}{\partial \boldsymbol{\tau} \partial \mathbf{a}_n} = -\frac{1}{\sigma^2} \{\mathbf{a}_n^* \mathbf{g}_n'^H(\boldsymbol{\tau}) \mathbf{g}_n(\boldsymbol{\tau}) - (\mathbf{y}_n - \mathbf{g}_n(\boldsymbol{\tau}) \mathbf{a}_n)^H \mathbf{g}_n'(\boldsymbol{\tau})\},$$

où $\mathbf{g}_n'(\boldsymbol{\tau}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \mathbf{g}_n(\boldsymbol{\tau})}{\partial \boldsymbol{\tau}}$. En prenant l'espérance par rapport à la loi de \mathbf{y} sachant \mathbf{a} , on obtient :

$$\mathbb{E}_{\mathbf{y}|\mathbf{a}} \left(\frac{\partial^2 \ln(f(\mathbf{y} | \mathbf{a}, \mathbf{a}))}{\partial \boldsymbol{\tau} \partial \boldsymbol{\tau}} \right) = -\frac{2}{\sigma^2} \sum_{n=1}^N \Re(\mathbf{a}_n^* \mathbf{g}_n'^H(\boldsymbol{\tau}) \mathbf{g}_n'(\boldsymbol{\tau}) \mathbf{a}_n) = -\frac{2}{\sigma^2} \Re(\text{Tr}(\mathbf{G}^H(\boldsymbol{\tau}) \mathbf{G}(\boldsymbol{\tau}) \mathbf{a} \mathbf{a}^H))$$

$$\mathbb{E}_{y|\mathbf{a}} \left(\frac{\partial^2 \ln(f(y|\mathbf{a}, a))}{\partial \mathbf{a} \partial \mathbf{a}^H} \right) = -\frac{1}{\sigma^2} G^H(\boldsymbol{\tau}) G(\boldsymbol{\tau}) \boldsymbol{\delta}_{nm}$$

$$\mathbb{E}_{y|\mathbf{a}} \left(\frac{\partial^2 \ln(f(y|\mathbf{a}, a))}{\partial \boldsymbol{\tau} \partial \mathbf{a}^T} \right) = -\frac{1}{\sigma^2} \boldsymbol{\alpha}_n^* g_n'^H(\boldsymbol{\tau}) g_n(\boldsymbol{\tau}) = -\frac{1}{\sigma^2} \mathbf{a}^H G'^H(\boldsymbol{\tau}) G(\boldsymbol{\tau}),$$

où $G(\boldsymbol{\tau})$ est une matrice définie par $G(\boldsymbol{\tau}) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Diag}(g_1(\boldsymbol{\tau}), \dots, g_N(\boldsymbol{\tau}))$ et

$G'(\boldsymbol{\tau}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial G(\boldsymbol{\tau})}{\partial \boldsymbol{\tau}} = \text{Diag}(g_1'(\boldsymbol{\tau}), \dots, g_N'(\boldsymbol{\tau}))$. En prenant ensuite l'espérance par rapport à la loi de \mathbf{a} ,

nous obtenons grâce à

$$\mathbb{E}_{\mathbf{a}}(\mathbf{a}) = 0 \quad (42)$$

$$R_{\mathbf{a}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}_{\mathbf{a}}(\mathbf{a} \mathbf{a}^H) = \sigma_{\mathbf{a}}^2 \begin{bmatrix} 1 & \gamma & \gamma^2 & \dots & \gamma^{N-1} \\ \gamma & 1 & \gamma & \dots & \gamma^{N-2} \\ \gamma^2 & \gamma & 1 & \dots & \gamma^{N-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma^{N-1} & \gamma^{N-2} & \gamma^{N-3} & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad (43)$$

les expressions suivantes :

$$\mathbb{E}_{\mathbf{a}} \mathbb{E}_{y|\mathbf{a}} \left(\frac{\partial^2 \ln(f(y|\mathbf{a}, a))}{\partial \boldsymbol{\tau} \partial \boldsymbol{\tau}^T} \right) = -\frac{2}{\sigma^2} \Re(\text{Tr}(G^H(\boldsymbol{\tau}) G(\boldsymbol{\tau}) R_{\mathbf{a}}))$$

$$\mathbb{E}_{\mathbf{a}} \mathbb{E}_{y|\mathbf{a}} \left(\frac{\partial^2 \ln(f(y|\mathbf{a}, a))}{\partial \mathbf{a} \partial \mathbf{a}^H} \right) = -\frac{1}{\sigma^2} G^H(\boldsymbol{\tau}) G(\boldsymbol{\tau})$$

$$\mathbb{E}_{\mathbf{a}} \mathbb{E}_{y|\mathbf{a}} \left(\frac{\partial^2 \ln(f(y|\mathbf{a}, a))}{\partial \boldsymbol{\tau} \partial \mathbf{a}^T} \right) = 0,$$

Puisque $g_n^H(\boldsymbol{\tau}) g_n(\boldsymbol{\tau}) = 1$ ce qui implique que

$G^H(\boldsymbol{\tau}) G(\boldsymbol{\tau}) = \text{Diag}(g_1^H(\boldsymbol{\tau}) g_1(\boldsymbol{\tau}), \dots, g_N^H(\boldsymbol{\tau}) g_N(\boldsymbol{\tau})) = I$. A partir de la définition de $g_n(\boldsymbol{\tau})$ et de la relation (11), nous obtenons

$$g_n'(\boldsymbol{\tau}) = i \left(\phi'_{nM}(\boldsymbol{\tau}, a) e^{i\phi_{nM}(\boldsymbol{\tau}, a)}, \dots, \phi'_{nM+M-1}(\boldsymbol{\tau}, a) e^{i\phi_{nM+M-1}(\boldsymbol{\tau}, a)} \right)$$

avec $\phi'_{nM+m}(\boldsymbol{\tau}, a) = 2\pi h \sum_{j=0}^{L-1} a_{n-j} g(mT_e + jT - \boldsymbol{\tau})$. Puisque les symboles a_n sont i.i.d. et équi probables, nous obtenons

$$\xi(\tau) \stackrel{\text{def}}{=} E_a(g_n'^H(\tau)g_n'(\tau)) = \sum_{m=0}^{M-1} E_a((\phi'_{nM+m}(\tau, a))^2) = 4\pi^2 h^2 \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{L-1} g^2(mT_e + jT - \tau)$$

Par conséquent

$$E_a(G'^H(\tau)G'(\tau)) = \text{Diag}(E_a(g'H_1(\tau)g'_1(\tau)), \dots, E_a(g'H_N(\tau)g'_N(\tau))) = \xi(\tau)I$$

Grâce à la relation (44), on en déduit que

$$\text{Tr}(E_a(G'^H(\tau)G'(\tau))R_\alpha) = \xi \text{Tr}(R_\alpha) = N\sigma_\alpha^2 \xi(\tau)$$

D'où

$$\begin{aligned} I_{(\tau, \tau)} &= E_a E_a E_{y|\alpha} \left(-\frac{\partial^2 \ln f(y|\alpha)}{\partial \tau \partial \tau} \right) = \frac{2}{\sigma^2} \text{Tr}(E_a(G'^H(\tau)G'(\tau))R_\alpha) = \frac{2N\xi(\tau)\sigma_\alpha^2}{\sigma^2} \\ I_{(\tau, \alpha)} &= E_a E_{y|\alpha} \left(-\frac{\partial^2 \ln f(y|\alpha)}{\partial \tau \partial \alpha} \right) = 0 \\ I_{(\alpha, \alpha)} &= E_a E_a E_{y|\alpha} \left(-\frac{\partial^2 \ln f(y|\alpha)}{\partial \alpha \partial \alpha^H} \right) = \frac{M}{\sigma^2} I \end{aligned} \quad (44)$$

Nous déduisons à partir de (40) que les paramètres retard et gains sont découplés dans la MHFIM.

Nous calculons maintenant la seconde matrice de la MHFIM donnée par la relation (28). Nous obtenons à partir de la relation (29), l'expression suivante de la log-PDF a priori de α

$$\ln g(\alpha) = \ln P(\alpha_0) + \Lambda(\alpha) \quad (45)$$

où

$$\Lambda(\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} \ln(\pi\sigma_e^2) - \frac{1}{\sigma_e^2} \sum_{n=1}^N |\alpha_n - \gamma\alpha_{n-1}|^2$$

Après quelques manipulations simples suivies de quelques calculs, on obtient les dérivées secondes suivantes de $\ln g(\alpha)$ qui sont non nulles

$$\left(\frac{\partial^2 \ln \Lambda(\alpha)}{\partial \alpha \partial \alpha^*} \right)_{1,1} = -\frac{1+\gamma^2}{\sigma_e^2} + \left(\frac{\partial^2 \ln P(\alpha_0)}{\partial \alpha_0 \partial \alpha_0^*} \right) \quad (46)$$

$$\left(\frac{\partial^2 \ln \Lambda(\alpha)}{\partial \alpha \partial \alpha^*} \right)_{k,k} = \left(\frac{\partial^2 \ln \Lambda(\alpha)}{\partial \alpha \partial \alpha^*} \right)_{k-1,k-1} = -\frac{1+\gamma^2}{\sigma_e^2} \quad (47)$$

$$\left(\frac{\partial^2 \ln \Lambda(\alpha)}{\partial \alpha \partial \alpha^*} \right)_{k,k-1} = \left(\frac{\partial^2 \ln \Lambda(\alpha)}{\partial \alpha \partial \alpha^*} \right)_{k-1,k} = \frac{\gamma}{\sigma_e^2} \quad (48)$$

Grâce aux relations (46), (47) et (48), nous obtenons

$$B \stackrel{\text{def}}{=} E_{\alpha} \left(-\frac{\partial^2 \ln g(\alpha)}{\partial \alpha \partial \alpha^H} \right) = \begin{pmatrix} \frac{1+\gamma^2}{\sigma_e^2} - E_{\alpha_0} \left(\frac{\partial^2 \ln P(\alpha_0)}{\partial \alpha_0 \partial \alpha_0^*} \right) & -\frac{\gamma}{\sigma_e^2} & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{\gamma}{\sigma_e^2} & \frac{1+\gamma^2}{\sigma_e^2} & -\frac{\gamma}{\sigma_e^2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & -\frac{\gamma}{\sigma_e^2} & \frac{1+\gamma^2}{\sigma_e^2} & -\frac{\gamma}{\sigma_e^2} \\ 0 & \dots & 0 & -\frac{\gamma}{\sigma_e^2} & -\frac{1}{\sigma_e^2} \end{pmatrix}$$

Par conséquent

$$I_h = \begin{pmatrix} I_{(\mathbf{r}, \mathbf{r})} & 0^T \\ 0 & I_{(\alpha, \alpha)} + B \end{pmatrix}.$$

En inversant cette matrice, on obtient les expressions (34) et (35).

References (sur la partie principale du rapport: chapitres 1 à 8).

[1] J. Vilà Valls, J.-M. Brossier and L. Ros, "Extended Kalman Filter for oversampled dynamical phase offset estimation," *IEEE ICC 2009*, June 14-18, Dresden, Germany.

[2] J. Vilà Valls, J.-M. Brossier and L. Ros, "On-line Bayesian Cramér-Rao Bound for Oversampled Dynamical Phase Offset Estimation," *ISCCSP 2008 The 3rd International Symposium on Communications, Control and Signal Processing*, Malta, March 12-14, 2008.

[3] Dalia Oueidat, *La linéarisation GMSK et l'estimation de phase à l'aide du filtre de Kalman*, rapport de stage, 2008

[4] P. A. Laurent, "Exact and approximate construction of digital phase modulations by superposition of amplitude modulated pulses (AMP)," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 34, pp. 150-160, Feb. 1986.

[5] T. Aulin, N. Rydbeck and C.E Sundberg, "Continuous phase modulation part II: Partial response signaling," *IEEE Transactions on Communications*, COM-29, march 1981.

[6] T. Aulin and C.E Sundberg, "Continuous phase modulation part I: Full response signaling," *IEEE Transactions on Communications*, COM-29, march 1981.

[7] D.K. Asano, H. Leib, and S. Pasupathy, "Phase smoothing functions for continuous phase modulation," *IEEE Trans. on Communications*, vol. 42, no. 2-4, Part 2, pp. 1040-1049, 1994.

[8] F. Xiong, "Modem techniques in satellite communications," *IEEE Commun. Mag.*, vol. 32, no. 8, pp. 84-98, August 1994.

[9] W. C. Jakes, *Microwave Mobile Communications*, New York: Wiley, 1974.

[10] A. P. Dempster, N. M. Laird and D. B. Rubin, "Maximum likelihood from incompleter data via EM algorithm," *J. Roy. Statist. Soc.*, vol. 39, pp. 1, 1998.

[11] J. I. Smith, "A computer generated multipath fading simulation for mobile radio," *IEEE Trans. Veh. Technol.*, vol. VT-24, pp. 39-40, Aug. 1975.

[12] D. J. Young and N. C. Beaulieu, "The generation of correlated Rayleigh random variates by inverse Fourier transform," *IEEE Trans. Commun.*, vol. 48, no. 7, pp. 1114-1127, Jul. 2000.

[13] K. E. Baddour and N. C. Beaulieu, "Autoregressive modeling for fading channel simulation," *IEEE Trans. Wireless Commun.*, vol. 4, no. 4, pp. 1650-1662, Jul. 2005.

[14] H. E. Rauch, "Solutions to the linear smoothing problem," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 8, pp. 371-372, 1963.

[15] [17] H. E. Rauch, F. Tung and C. T. Striebel, "Maximum likelihood estimates of linear dynamic systems," *J. Amer. Inst. Aeronautics and Astronautics*, vol. 3, no. 8, pp. 1445-1450, 1965.

[16] H. L. Van Trees, *Detection, Estimation, and Modulation Theory, Part I*, New York, NY: John Wiley and Sons, 1968.

[17] Y. Rockah and P.M. Schultheiss, "Array Shape Calibration Using Sources in Unknown Locations-Part I: Near-Field Sources," *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Process*, vol. ASSP-35, pp. 286299, March 1987.

[18] S. Bay, B. Geller, A. Renaux, J.P. Barbot and J.M. Brossier, "On the Hybrid Cramer-Rao bound and its application to dynamical phase estimation," *IEEE Signal Processing letters*, vol. 15, pp. 453-456, 2008.

-
- [19] H. Abeida and J.P. Delmas, "Cramer-Rao bound for direction estimation of non-circular signals in unknown noise fields," *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 53, no. 12, pp. 4610-4618, December 2005.
- [20] H. Cramér, *mathematical methods of statistics*, Princeton, NJ: Princeton Univetisty press, 1946.
- [21] J. G. Proakis, *Digital communications*, (3ème édition) McGraw-Hill. New York, 1995.
- [22] U. Mengali and A. N. D'Andrea, *Synchronization techniques for digital receivers*, New York: Plenum Press, 1997.

AUTRES ANNEXES

(non liées directement à la partie principale du rapport).

9 Annexe 3 : Estimation de phase fractionnée

A partir de cette section, nous rappelons, pour mémoire, les principaux travaux réalisés durant la première période du projet. Ils correspondent à peu près aux chapitres 3 et 4 du mémoire de thèse de Jordi Vilà-Valls, en cours de rédaction (soutenance prévue en Avril 2010),

9.1 Synchronisation fractionnée: modélisation et bornes de Cramér-Rao

Spécificités du travail décrit ici concernant l'estimation fractionnée de phase :

- Une modélisation Brownienne de la phase associée à un modèle de transmission simple prenant en compte les formes d'onde utilisées par les systèmes GPS et GALILEO. Ce modèle peut facilement être utilisé pour d'autres formes d'onde telle que celle du GSM.
- La définition d'un modèle d'observation fractionné (plusieurs échantillons par durée symbole) afin de reconsidérer le problème de la poursuite de phase en prenant en compte un suréchantillonnage du signal reçu.
- Le calcul de la borne de Cramér Rao Bayésienne en supposant les données transmises connues. La borne de Cramér-Rao Bayésienne a été évaluée pour estimer des bornes sur les performances en ligne et hors ligne des estimateurs. Ce résultat pourra être étendu au cas de symboles transmis inconnus du récepteur.
- Le chiffage de l'apport d'un suréchantillonnage du signal reçu. L'idée étant que les signaux de communication possèdent un excès de bande par rapport à la bande de Nyquist (l'inverse de la durée symbole) et qu'un échantillonnage plus rapide qu'un point par durée symbole permet de glaner un supplément d'information ; supplément d'information dont l'impact sur les performances des estimateurs de phase peut être chiffré à l'aide de bornes minimales telles que la borne de Cramér-Rao. Les résultats ont été chiffrés à partir de formes d'ondes classiques en localisation NRZ (utilisés en GPS) et BOC (utilisées en GALILEO), qui présentent un excès de bande (roll-off) important.
- L'interprétation des résultats obtenus : évaluation de l'intérêt d'un suréchantillonnage du signal reçu pour l'estimation, gain de performance lié au suréchantillonnage, gain de performance lié à la prise en compte d'information *a priori* sur l'évolution de la phase, robustesse de la solution suréchantillonnée par rapport à une erreur connue sur l'instant d'échantillonnage.

Les méthodes *fractionnées*, sont présentes dans plusieurs étapes du récepteur, par exemple, dans l'étape d'égalisation ou de synchronisation. Le concept fractionné fait référence à l'utilisation d'un signal suréchantillonné, relativement au temps symbole. Intuitivement, on peut penser que si l'on a plus d'échantillons par symbole, on a plus d'information pour récupérer l'information utile, mais ça n'est pas toujours vrai, car il suffit par exemple de vérifier le théorème de Nyquist-Shannon [96], pour que notre signal discret contienne toute l'information nécessaire pour récupérer l'information utile. Dans les systèmes de communication par satellite, on utilise de fonctions de mise en forme avec un grand excès

de bande, où le théorème de Nyquist-Shannon n'est pas vérifié avec un seul échantillon par temps symbole. C'est dans ce cas, que l'on envisage d'étudier théoriquement le problème de la synchronisation fractionnée, face aux méthodes qui utiliseraient un signal échantillonné au temps symbole.

Ce chapitre analyse le problème de la synchronisation fractionnée, c'est à dire, l'estimation de phase et offset de fréquence en utilisant le signal reçu suréchantillonné. La section 9.1.1 présente le modèle que l'on utilise dans le reste du chapitre. Le principe est de proposer une modélisation d'état qui inclut le bruit coloré, pour l'estimer au même temps que les paramètres d'intérêt. Les bornes de Cramér-Rao associées aux problèmes d'estimation de phase et d'estimation conjointe de phase et offset de fréquence, sont présentés dans la section 9.1.2.

9.1.1 Modélisation

On veut étudier en profondeur le problème d'estimation des paramètres de synchronisation. On suppose une séquence complexe connue $\{a_m\}_{m \in \mathbb{Z}}$, transmise au travers d'un canal avec bruit AWGN, une porteuse perturbée par un déphasage $\theta(t)$ et une amplitude $\rho(t) = 1$.

9.1.1.1 Modèle de signal suréchantillonné

Formulation discrète générale

Le signal complexe reçu en bande de base, après filtrage adapté au récepteur peut être écrit comme

$$y(t) = \left[\left\{ T_c \sum_{m=1}^{L_a} a_m p(t - mT_c - \tau(t)) \right\} e^{i\theta(t)} + n(t) \right] * p^*(-t) \quad (3.1)$$

où T_c , $p(t)$ et $n(t)$ sont la période chip, la fonction de mise en forme, et un bruit Gaussien complexe circulaire avec une densité spectrale de puissance (psd) connue N_0 . On considère que le délai est constant dans la fenêtre d'observation $\tau(t) = \tau$ et l'on réécrit l'équation

$$y(t) = T_c \sum_{m=1}^{L_a} a_m \left\{ p(t) e^{i\theta(t+mT_c+\tau)} \right\} * \delta(t - mT_c - \tau) * p^*(-t) + n(t) * p^*(-t) \quad (3.2)$$

On définit le bruit coloré filtré comme

$$b(t) = n(t) * p^*(-t) \quad (3.3)$$

et la fonction de mise en forme $\tilde{g}_m(t)$ comme

$$\tilde{g}_m(t) = T_c \int_{-\infty}^{+\infty} p^*(-\alpha) e^{i\theta(t-\alpha+mT_c+\tau)} p(t-\alpha) d\alpha \quad (3.4)$$

D'après cela, le signal peut être écrit comme

$$\begin{aligned} y(t) &= T_c \sum_{m=1}^{L_a} a_m p(t-mT_c-\tau) e^{i\theta(t)} * p^*(-t) + b(t) \\ &= \sum_{m=1}^{L_a} a_m \tilde{g}_m(t-mT_c-\tau) + b(t) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Désormais, on suppose que le support de la mise en forme $p(t)$, est $[0, T_c)$ et l'on suppose une phase qui varie lentement dans une période T_c . Cette dernière hypothèse est normale dans les systèmes de communication par satellite, car la variation de phase (à cause du bruit de phase des oscillateurs, des effets Doppler, ...) dans une période chip est faible. Normalement, le bruit de phase introduit par les oscillateurs, est moindre comparé à la variation en raison des décalages Doppler [13]. Par rapport aux effets Doppler, il est facile de vérifier l'hypothèse dans un scénario réel comme le système Galileo: dans le pire des cas, on peut considérer un décalage Doppler maximal d'environ ± 20 kHz. Si l'on suppose un taux chip de $\frac{1}{T_c} = 1$ Mchip/s, la variation de phase maximale dans une période est d'environ $\Delta_\theta = 0.1$ rad, ce qui correspond à une gigue d'amplitude faible ($0.1 / 2\pi = 1.6\%$) ou une variation de 0.01 rad^2 . Dans la suite on considérera une phase avec une variance maximale de $\sigma_w^2 = 0.1 \text{ rad}^2$, pour prendre en compte des bruits de phase plus forts, et en même temps vérifier l'hypothèse de variation faible dans une période T_c .

D'après les hypothèses, on peut approcher $\tilde{g}_m(t)$ de la façon suivante

$$\tilde{g}_m(t) \approx g(t) e^{i\theta(t+(m+\frac{1}{2})T_c+\tau)} \quad (3.6)$$

où

$$g(t) = T_c \int_{-T_c}^0 p^*(-\alpha) p(t-\alpha) d\alpha \quad (3.7)$$

Si le signal reçu filtré, est suréchantillonné aux instants $t_k = k \frac{T_c}{S} + \tau + \tau_o$, avec S un facteur de suréchantillonnage entier et τ_o le décalage par rapport aux instants d'échantillonnage optimaux (équivalent à l'erreur dans notre connaissance de τ), supposés connus et $0 \leq \tau_o < \frac{T_c}{S}$, on a

$$y\left(k \frac{T_c}{S} + \tau + \tau_o\right) = \sum_m a_m \tilde{g}_m\left(k \frac{T_c}{S} + \tau + \tau_o - mT_c - \tau\right) + b\left(k \frac{T_c}{S} + \tau + \tau_o\right) \quad (3.8)$$

et d'après l'approximation (eq. 3.6) on peut écrire

$$y\left(k \frac{T_c}{S} + \tau + \tau_o\right) = A_k e^{i\theta\left(k \frac{T_c}{S} + \tau + \tau_o + \frac{T_c}{2}\right)} + b\left(k \frac{T_c}{S} + \tau + \tau_o\right) \quad (3.9)$$

où

$$A_k = \sum_m a_m g\left(k \frac{T_c}{S} + \tau_o - mT_c\right). \quad (3.10)$$

On peut écrire finalement, d'une façon compacte, le modèle discret d'observation

$$y_k = A_k e^{i\theta_k} + b'_k \quad (3.11)$$

où k fait référence aux instants t_k . On note que le bruit b'_k est un bruit coloré de variance σ_n^2 , qui est la variance du bruit Gaussien additif $n(t)$ mesuré dans la bande équivalente du filtre de réception $p^*(-t)$. Si l'on note la transformée de Fourier du filtre de mise en forme $P(f)$, cette variance s'écrit

$$\sigma_n^2 = \int_{-\infty}^{\infty} N_0 |P(f)|^2 df = N_0 \int_{-\infty}^{\infty} p(t)^2 dt = N_0 \frac{g(0)}{T_c} \quad (3.12)$$

On peut définir l'indice symbole $p_s = \lfloor \frac{k}{S} \rfloor$, ou de manière équivalente, $k = p_s S + s$ avec s ($s = 0, \dots, S-1$) l'indice sous-symbole (*i.e.* la position dans l'intervalle symbole).

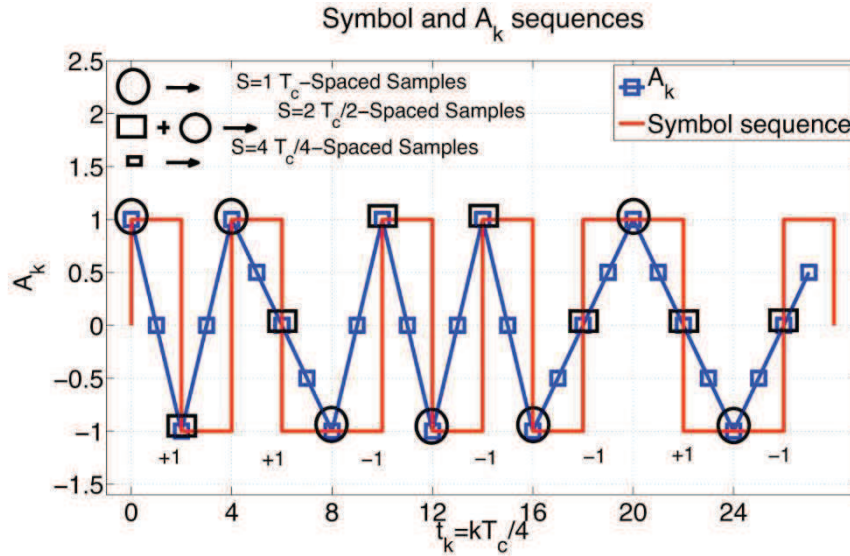


Figure 9: Séquence chip émise et signal reçu avec un canal idéal. On peut distinguer les échantillons pour $S = 1, 2$ et 4 .

$\{A_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ est une séquence avec une puissance non-stationnaire pour $S > 1$, même si $\{a_m\}_{m \in \mathbb{Z}}$ est une séquence de puissance stationnaire ($|a_m|^2 = 1$).

Dans la figure 9, on montre, comme un exemple, la transmission d'une séquence \mathbf{a} de longueur 7 symboles, avec mise en forme BOC (voir la section 1.2), à travers un canal parfait (sans déphasage, sans bruit additif et synchronisé (τ connu et $\tau_o = 0$)). On peut voir le signal émis (rouge) et le signal reçu après filtrage adapté (bleu). On a marqué avec de grands cercles, les échantillons du cas $S = 1$ (points de référence). Si l'on prend les grands cercles plus les grands carrés, on a les échantillons du cas $S = 2$ (on appelle les grands carrés, points intermédiaires). Et finalement, les petits carrés sont les échantillons que l'on obtient si l'on utilise un facteur de suréchantillonnage égal à $S = 4$.

Si l'on regarde le résultat avec $S = 4$, on voit que les échantillons que l'on rajoute par rapport au cas $S = 2$, sont nuls, ainsi ces échantillons n'apportent pas d'information pour l'estimation.

Re-formulation discrète pour le bruit

Dans la sous-section précédente, on a défini la séquence de bruit $\{b'_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$, à partir du bruit analogique $n(t)$. Ici on présente une reformulation du problème, pour remplacer cette série temporelle par une nouvelle séquence de bruit $\{b_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ avec les mêmes propriétés statistiques, mais obtenue à partir d'une formulation discrète. Cette formulation sera utile pour inclure ce bruit dans la formulation d'état. On peut écrire

$$\begin{aligned}
 b'_k &= \int_0^{T_c} n\left(\alpha + k \frac{T_c}{S} + \tau + \tau_o\right) p^*(\alpha) d\alpha \\
 &= \sum_{j=0}^{S-1} \int_{j \frac{T_c}{S}}^{(j+1) \frac{T_c}{S}} n\left(\alpha + k \frac{T_c}{S} + \tau + \tau_o\right) p^*(\alpha) d\alpha
 \end{aligned} \tag{3.13}$$

Si l'on a N mesures, la matrice de covariance $N \times N$, Γ , du bruit d'observation, dépend du facteur de suréchantillonnage S . Par exemple, pour $S = 2$, on a une matrice tri-diagonale

$$\Gamma = \frac{N_0}{T_c} \begin{pmatrix} g(0) & g\left(-\frac{T_c}{2}\right) & & \\ g\left(\frac{T_c}{2}\right) & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & & g\left(-\frac{T_c}{2}\right) \\ & & g\left(\frac{T_c}{2}\right) & g(0) \end{pmatrix} \tag{3.14}$$

Les variables aléatoires

$$Z_{k,j} = \int_{j \frac{T_c}{S}}^{(j+1) \frac{T_c}{S}} n\left(\alpha + k \frac{T_c}{S} + \tau + \tau_o\right) p^*(\alpha) d\alpha \tag{3.15}$$

sont Gaussiennes de moyenne nulle. A k fixé, $Z_{k,j}$ sont indépendantes par rapport à j . Leur variance est

$$E\left(|Z_{k,j}|^2\right) = N_0 \int_{j \frac{T_c}{S}}^{(j+1) \frac{T_c}{S}} |p(\alpha)|^2 d\alpha \tag{3.16}$$

On peut définir une séquence stationnaire Gaussienne i.i.d., de moyenne nulle et variance unité $\{n_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ et

$$\Pi_j = \left\{ N_0 \int_{j \frac{T_c}{S}}^{(j+1) \frac{T_c}{S}} |p(\alpha)|^2 d\alpha \right\}^{\frac{1}{2}} \tag{3.17}$$

Les échantillons b'_k ont les mêmes propriétés statistiques que les échantillons b_k , obtenus à partir du filtrage de la série temporelle n_k :

$$b_k = \sum_{j=0}^{S-1} \Pi_j n_{k-j-1} \quad (3.18)$$

Avec cette formulation, on peut inclure le bruit d'observation coloré dans le modèle d'état, pour prendre en compte la corrélation entre les différents échantillons du bruit.

9.1.1.2 Modèles d'évolution

Dans cette sous-section, on introduit la modélisation des paramètres de synchronisation. On considère deux cas différents: estimation de phase, et estimation conjointe de phase et décalage Doppler.

Modèle de phase

En pratique, on doit considérer des giges introduites par les imperfections des oscillateurs et les perturbation du canal. Pour prendre en compte ces effets on considère une évolution de la phase Brownienne [22]:

$$\theta_k = \theta_{k-1} + w_k \quad k \geq 2 \quad (3.19)$$

avec w_k , une séquence Gaussienne, i.i.d. et de moyenne nulle, avec une variance connue $\frac{\sigma_w^2}{S}$, où σ_w^2 est la variance de l'incrément de phase dans une période. On note que la variance du bruit Gaussien est liée directement à la vitesse d'évolution de la phase. La matrice de covariance $N \times N$, du décalage de phase $\theta = [\theta_1 \dots \theta_N]^T$, si l'on considère que $\sigma_{\theta_1}^2 = 0$, s'écrit

$$\Sigma = \frac{\sigma_w^2}{S} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & N \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

et son inverse prend une forme tri-diagonale.

$$\Sigma^{-1} = \frac{S}{\sigma_w^2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 2 & -1 \\ & & & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

Modèle de phase et Doppler

Normalement, on a un décalage de fréquence entre la porteuse d'émission et celle du récepteur, ou des effets Doppler, et donc, la distorsion de phase est linéaire avec le temps. On modifie le modèle de phase du paragraphe précédent (eq. (3.19)) pour prendre en compte les décalages fréquentiels. On suppose une phase Brownienne avec une dérive constante [22]:

$$\begin{aligned} \theta_k &= \theta_{k-1} + \delta_{k-1} + w_k \\ \delta_k &= \delta_{k-1} \end{aligned} \quad (3.22)$$

avec $k \geq 2$, w_k est une séquence Gaussienne, de moyenne nulle, i.i.d. et de variance connue $\frac{\sigma_w}{S}$, et

δ_k est une dérive constante inconnue. σ_w^2 est la variance de l'incrément de phase dans une période. La matrice de covariance du décalage de phase dans ce cas, est la même que dans le paragraphe précédent (eq. (3.20)).

9.1.1.3 Modèle d'état

Quand on veut utiliser une approche de filtrage optimal, on a besoin d'une formulation en modèle d'état. Étant donné que l'on veut prendre en compte que le bruit, à la sortie du filtre adapté, est coloré, on doit l'inclure dans le modèle d'état.

D'abord on considère un vecteur glissant $[v_k \ v_{k-1} \ \dots \ v_{k-S+1}]^T$ sur un bruit i.i.d. n_k . On peut écrire l'évolution de ce vecteur

$$\begin{bmatrix} v_k \\ v_{k-1} \\ \vdots \\ v_{k-S+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{k-1} \\ v_{k-2} \\ \vdots \\ v_{k-S} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

Le bruit coloré b_k peut s'écrire de la façon suivante

$$b_k = [\Pi_0 \cdots \Pi_{S-1}] \begin{bmatrix} v_{k-1} \\ v_{k-2} \\ \vdots \\ v_{k-S} \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

L'état dépend des paramètres que l'on veut prendre en compte. Si l'on considère l'estimation de phase, l'état inclut les décalages de phase et le bruit coloré. Si l'on considère l'estimation de phase et d'offset de fréquence, l'état inclut, en plus du décalage de phase et du bruit coloré, l'offset de fréquence. On présente le cas le plus général:

$$x_k = [\theta_k, \delta_k, b_k, v_k, \dots, v_{k-S+1}]^T \quad (3.25)$$

On définit la matrice d'évolution

$$M_K = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 0 & \Pi_0 & \Pi_1 & \cdots & \Pi_{S-1} \\ & \vdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & 0 & 0 & 1 & & \vdots \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & & & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

et le vecteur $v_k = [w_k \ 0 \ 0 \ n_k \ 0 \ \cdots \ 0]^T$. Avec ça on peut définir l'évolution de l'état

$$x_k = M_K x_{k-1} + v_k \quad (3.27)$$

L'équation d'observation peut s'écrire en fonction de l'état

$$y_k = A_k \exp(i[1 \ 0 \ \cdots \ 0]^T x_k) + [0 \ 0 \ 1 \ 0 \ \cdots \ 0]^T x_k = A_k \exp(i\theta_k) + b_k \quad (3.28)$$

On remarque que l'équation d'état est linéaire et que l'observation dépend, de façon non-linéaire, de l'état. Avec cette formulation, on n'a pas de bruit d'observation, car on l'a inclut dans l'état.

9.1.2 Bornes de Cramér-Rao pour la synchronisation fractionnée

La famille des bornes de Cramér-Rao (CRBs) donne des bornes minimales sur l'erreur quadratique moyenne (MSE) qu'un estimateur non biaisé peut atteindre. Dans cette section, on présente le calcul des bornes associées au problème modélisé dans la section 9.1.1. D'abord, on établit

la borne de Cramér-Rao Bayésienne pour l'estimation de phase, et ensuite la borne hybride pour l'estimation de phase et offset de fréquence, qui est similaire à la première. Ensuite, on présente les résultats pour quelques scénarios précis, où on trace les bornes en considérant plusieurs facteurs de suréchantillonnage, par rapport au SNR, à la vitesse de variation de la phase et à l'erreur d'estimation du délai. Dans un deuxième temps, on présente la borne d'estimation conjointe de phase et délai.

9.1.2.1 Borne de Cramér-Rao Bayésienne pour l'estimation de phase

On veut établir une CRB pour l'estimation des décalages de phase, qui sont des paramètres aléatoires, avec une densité de probabilité *a priori* connue, donc on calculera une borne Bayésienne. On veut calculer la borne *en-ligne*, cela veut dire qu'à l'instant k , le récepteur fait la mise à jour du vecteur d'observation, en ajoutant la nouvelle mesure, y_k , pour estimer le paramètre à cet instant, θ_k . On considère \mathbf{y} le vecteur N -dimensionnel qui contient toutes les mesures.

On utilise le modèle présenté dans la section précédente (eqs. (3.19, 3.28)):

$$\theta_k = \theta_{k-1} + w_k \quad (3.29)$$

$$y_k = A_k \exp(i\theta_k) + b_k \quad (3.30)$$

où, comme on l'a déjà dit, $\{b_k, k = 1, \dots, N\}$ est un bruit coloré avec matrice de covariance Γ , de taille $N \times N$. L'indice k fait référence aux instants t_k , les A_k sont les coefficients définis dans l'équation (3.10) et $\boldsymbol{\theta} = [\theta_1 \dots \theta_N]^T$.

On rappelle l'expression de la BIM

$$\mathbf{B} = E_{\mathbf{y}, \boldsymbol{\theta}} \left[-\Delta_{\boldsymbol{\theta}}^{\boldsymbol{\theta}} \log p(\mathbf{y} | \boldsymbol{\theta}) \right] + E_{\boldsymbol{\theta}} \left[-\Delta_{\boldsymbol{\theta}}^{\boldsymbol{\theta}} \log p(\boldsymbol{\theta}) \right] = \mathbf{B}^D + \mathbf{B}^P \quad (3.31)$$

Pour calculer cette matrice, on a besoin de la fonction de vraisemblance et de la densité de probabilité *a priori*. De l'équation d'observation (3.28), on sait que la log-vraisemblance s'écrit

$$\log p(\mathbf{y} | \boldsymbol{\theta}) = \log \frac{1}{\pi^N |\det(\mathbf{G})|} - [\mathbf{y} - \mathbf{m}]^H \mathbf{G}^{-1} [\mathbf{y} - \mathbf{m}] \quad (3.32)$$

où \mathbf{m} est le vecteur moyenne de \mathbf{y} , de k^{ieme} élément $[\mathbf{m}]_k = A_k e^{i\theta_k}$. Le logarithme de la densité de probabilité *a priori* s'écrit

$$\log p(\theta) = \log p(\theta_1) + (N-1) \log \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_w} \right) - \sum_{k=2}^N \frac{(\theta_k - \theta_{k-1})^2}{2\sigma_w^2} \quad (3.33)$$

Le premier terme de la BIM (eq.(3.31)) peut être calculé à partir de la vraisemblance (eq.(3.32)). On note $\Lambda(\theta) = \log p(y|\theta)$. Si l'on calcule la dérivée par rapport aux l^{ieme} et k^{ieme} éléments de θ , on obtient

$$\frac{\partial^2 \Lambda(\theta)}{\partial \theta_k \partial \theta_l} = 2\Re \left\{ \frac{\partial^2 m^H}{\partial \theta_k \partial \theta_l} \Gamma^{-1} [y - m] - \frac{\partial m^H}{\partial \theta_l} \Gamma^{-1} \frac{\partial m}{\partial \theta_k} \right\} \quad (3.34)$$

Le $(k, l)^{ieme}$ élément de la matrice \mathbf{B}^D est

$$\begin{aligned} [\mathbf{B}^D]_{k,l} &= E_\theta \left\{ E_{y|\theta} \left\{ -\frac{\partial^2 \Lambda(\theta)}{\partial \theta_k \partial \theta_l} \right\} \right\} \\ &= E_\theta \left\{ 2\Re \left\{ \frac{\partial m^H}{\partial \theta_l} \Gamma^{-1} \frac{\partial m}{\partial \theta_k} \right\} \right\} \\ &= 2\Re \left\{ A_l^* A_k \cdot [\Gamma^{-1}]_{k,l} E_\theta \left\{ e^{j(\theta_k - \theta_l)} \right\} \right\} \end{aligned} \quad (3.35)$$

On peut écrire

$$\begin{aligned} E_\theta \left\{ e^{j(\theta_k - \theta_l)} \right\} &= E_\theta \left\{ e^{j(u_{kl}^T \theta)} \right\} \\ &= \phi(u_{kl}) \end{aligned} \quad (3.36)$$

avec $u_{kl}^T = [0, \dots, 0, (+1), 0, \dots, 0, (-1), 0, \dots, 0]$, +1 dans la k^{ieme} position du vecteur et -1 dans la l^{ieme} , $\phi(\cdot)$ est la fonction caractéristique d'une variable Gaussienne θ :

$$\begin{aligned} \phi(u_{kl}) &= \exp \left\{ -\frac{1}{2} u_{kl}^T \Sigma^{-1} u_{kl} \right\} \\ &= \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left([\Sigma^{-1}]_{k,k} + [\Sigma^{-1}]_{l,l} - 2[\Sigma^{-1}]_{k,l} \right) \right\} \end{aligned} \quad (3.37)$$

avec Σ la matrice de covariance des décalages de phase θ (eq.(3.20)). Finalement,

$$[\mathbf{B}^D]_{k,l} = 2\Re \left\{ A_l^* A_k [\Gamma^{-1}]_{k,l} e^{\Psi_{k,l}} \right\} \quad (3.38)$$

avec

$$\Psi_{k,l} = \left\{ -\frac{1}{2} \left([\Sigma^{-1}]_{k,k} + [\Sigma^{-1}]_{l,l} - 2[\Sigma^{-1}]_{k,l} \right) \right\} \quad (3.39)$$

On note que $[\Sigma^{-1}]$ prend une forme tri-diagonale (voir eq.(3.21)), alors les éléments $[\Sigma^{-1}]_{k,l}$ sont non-nuls seulement si $|k-l| \leq 1$, on a les valeurs suivantes:

- $[\Sigma^{-1}]_{|k-l|=1} = -S / \sigma_w^2$
- $[\Sigma^{-1}]_{k,k} = 2 \frac{S}{\sigma_w^2}$, for $2 < k < N-1$
- $[\Sigma^{-1}]_{1,1} = [\Sigma^{-1}]_{N,N} = S / \sigma_w^2$

On doit considérer deux cas:

- $\Psi_{k,k} = 0$ for $k = l$
- $\Psi_{k,l} = -\beta \frac{S}{\sigma_w^2}$ pour $|k-l| \geq 1$

avec $1 \leq \beta \leq 3$ si $\sigma_{\theta_1}^2 = 0$.

On peut conclure que $e^{\Psi_{k,l}} \sim 0$, quand σ_w^2 est faible et $k \neq l$. Le pire des cas est si $k = 1$, $l = N$ et $S = 1$; dans ce cas, on a $\Psi_{1,N} = -\frac{1}{\sigma_w^2}$, et alors $e^{\Psi_{k,l}} = e^{-\frac{1}{\sigma_w^2}}$ peut être négligé lorsque $\sigma_w^2 \leq 0.1$, si l'on compare ce valeur avec les valeurs de la diagonale principale.

Étant donné que l'on considère une variation faible dans une période (pour que l'approximation dans eq.(3.6) soit valide), on peut considérer que la matrice \mathbf{B}^D est diagonale, avec

$$[\mathbf{B}^D]_{k,k} = 2 |A_k|^2 [\Gamma^{-1}]_{k,k} \quad (3.40)$$

Dans la suite, on calcule le deuxième terme de la BIM (eq.(3.31)). De l'équation d'évolution de l'état (eq.(3.19)) on a

$$\Delta_{\theta}^{\theta} \ln p(\theta) = \Delta_{\theta}^{\theta} \ln p(\theta_1) + \sum_{k=1}^N \Delta_{\theta}^{\theta} \ln p(\theta_k | \theta_{k-1}) \quad (3.41)$$

Le premier terme de l'équation (3.41) est une matrice avec un seul élément non-nul, l'élément (1,1)

$$[\Delta_{\theta}^{\theta} \ln p(\theta_1)]_{1,1} = \frac{\partial^2 \ln p(\theta_1)}{\partial \theta_1^2} \quad (3.42)$$

Les autres termes sont des matrices avec quatre termes non-nuls, les éléments $(k-1, k-1)$, $(k-1, k)$, $(k, k-1)$ et (k, k) . À cause de la nature Gaussienne du bruit, on a

$$\begin{aligned} [\Delta_{\theta}^{\theta} \ln p(\theta_k | \theta_{k-1})]_{k,k} &= [\Delta_{\theta}^{\theta} \ln p(\theta_k | \theta_{k-1})]_{k-1,k-1} \\ &= \frac{-S}{\sigma_w^2} \end{aligned} \quad (3.43)$$

$$\begin{aligned} [\Delta_{\theta}^{\theta} \ln p(\theta_k | \theta_{k-1})]_{k,k-1} &= [\Delta_{\theta}^{\theta} \ln p(\theta_k | \theta_{k-1})]_{k-1,k} \\ &= \frac{S}{\sigma_w^2} \end{aligned} \quad (3.44)$$

Si l'on considère que $E_{\theta_1} [\Delta_{\theta}^{\theta} \ln p(\theta_1)] = 0$ (*a priori* sur θ_1 non-informatif, voir [12]),

$$\mathbf{B}^P = \frac{1}{\sigma_w^2 / S} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.45)$$

D'après les équations (3.40,3.45), la BIM a une forme tri-diagonale

$$\mathbf{B} = \beta \begin{pmatrix} (C_1 + 1) & 1 & & & \\ & 1 & C_2 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & 1 & C_{N-1} & 1 \\ & & & & 1 & (C_N + 1) \end{pmatrix} \quad (3.46)$$

avec $\beta = -S / \sigma_w^2$ et $C_k = (1 / \beta) [\mathbf{B}^D]_{k,k} - 2$.

LURGA

La borne *en-ligne* pour l'estimation de θ_N , est égale à l'élément (N, N) de l'inverse de la BIM, $\left[\mathbf{B}^{-1} \right]_{N,N}$. D'après [143], les éléments de la diagonal de l'inverse d'une matrice tri-diagonale, peuvent s'écrire

$$\left[\mathbf{B}^{-1} \right]_{k,k} = \frac{d_{k-1}h_{k+1}}{d_k} \quad (3.47)$$

avec

$$\begin{aligned} d_k &= \beta C_k d_{k-1} - \beta^2 d_{k-2} \quad \text{for } k = 2, \dots, N-1 \\ h_k &= \beta C_k h_{k+1} - \beta^2 h_{k+2} \quad \text{for } k = 2, \dots, N-1 \end{aligned} \quad (3.48)$$

et

$$\begin{aligned} d_0 &= 1, d_1 = \beta(C_1 + 1) \\ d_N &= \beta(C_N + 1)d_{N-1} - \beta^2 d_{N-2} \\ h_1 &= \beta(C_1 + 1)h_2 - \beta^2 h_3 \\ h_N &= \beta(C_N + 1)h_{N+1} = 1 \end{aligned}$$

alors, la BCRB *en-ligne* peut s'écrire

$$BCRB = \left[\mathbf{B}^{-1} \right]_{N,N} = \frac{d_{N-1}}{d_N} \quad (3.49)$$

On note que cette expression correspond à l'adjoint de $\left[\mathbf{B} \right]_{N,N}$, sur le déterminant de \mathbf{B} .

Remarques.

Si l'on étudie le problème dans le cas DA, la borne dépend généralement de la séquence émise \mathbf{a} , alors, il faut la calculer pour une séquence donnée. D'après l'équation (3.40), on voit que pour $S = 1$, $s = 0$ (points de référence) et $\tau_o = 0$, la borne est indépendante de la séquence émise, car $|A_k| = 1 \forall k$. Dans les autres cas, la borne dépend de la séquence, du facteur de suréchantillonnage S et de la position s dans le symbole courant (indice M):

$$BCRB(\mathbf{a}, S, s) = \left[\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{a}) \right]_{N,N} \quad (3.50)$$

avec $N = (M-1)*S + 1 + s$.

Synthèse du calcul. Ici on donne une brève synthèse de calcul, pour obtenir la BCRB pour l'estimation de phase dans le cas DA. Si les symboles et les statistiques, des bruits de phase et d'observation, sont connues, on peut calculer la borne de deux façons différentes: calcul de la matrice $[B]$ et son inverse, ou calcul des éléments C_k et dérivation récursive de la borne.

1. Dérivation directe de la BCRB:

- Calculer la matrice $[B^D]$ à partir de l'eq.(3.40).
- Calculer la matrice $[B^P]$ à partir de l'eq.(3.45).
- Calculer l'inverse de la BIM (eq.(2.117)) et prendre le dernier élément de la diagonale pour obtenir la BCRB *en-ligne* (eq.(3.50)).

2. Dérivation récursive de la BCRB:

- Calculer les coefficients C_k , à partir des éléments $[B^D]_{k,k}$ (eq.(3.40)).
- Utiliser la récursion eq.(3.48) pour obtenir eq.(3.49).

9.1.2.2 Borne de Cramér-Rao Hybride pour l'estimation conjointe de phase et offset de fréquence

Dans cette section, on établit la CRB pour l'estimation conjointe de phase et offset de fréquence. Étant donné que la phase, θ , est aléatoire et a une densité de probabilité *a priori* $p(\theta)$ connue, et que la dérive est un paramètre constant, on utilise la borne de Cramér-Rao hybride (HCRB) (voir section 2.5).

Dans la suite, étant donné que l'offset de fréquence est constant, on note $\delta_k = \delta$, et δ^* comme la vraie valeur de δ .

Comme dans le cas précédent, on utilise le modèle d'état (avec dérive) et d'observation définis dans (eqs.(3.22,3.28)):

$$\theta_k = \theta_{k-1} + \delta + w_k \quad (3.51)$$

$$y_k = A_k \exp(i\theta_k) + b_k \quad (3.52)$$

où b_k est un bruit coloré avec matrice de covariance Γ . L'indice k fait référence aux instants t_k et A_k sont les coefficients définis dans l'équation (3.10).

Si l'on suppose que l'on a N mesures disponibles, on aura N paramètres de phase,

$\theta = [\theta_1 \cdots \theta_N]^T$, plus la dérive δ . Pour calculer la borne, on doit d'abord calculer la HIM. Dans la HIM,

on peut voir deux termes bien différenciés, et la matrice $((N+1) \times (N+1))$ de la borne peut s'écrire comme:

$$HCRB = \{H\}^{-1} = \{H^D + H^P\}^{-1} \quad (3.53)$$

où le k^{ieme} élément de la diagonale, $[\mathbf{HCRB}]_{k,k}$ représente la borne pour l'estimation de $[\mu]_k$ à partir du bloc d'observation $\mathbf{y} = [y_1 \cdots y_N]$.

La HIM peut être réécrite avec des matrices blocs

$$H = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_{11} & \mathbf{h}_{12} \\ \mathbf{h}_{21} & H_{22} \end{pmatrix} \quad (3.54)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{11} &= E_{\mathbf{y}, \theta | \delta^*} \left[-\Delta_{\theta}^{\theta} \log p(\mathbf{y} | \theta, \delta) | \delta^* \right] \\ &+ E_{\theta | \delta^*} \left[-\Delta_{\theta}^{\theta} \log p(\theta | \delta^*) \right] \\ \mathbf{h}_{12} &= \mathbf{h}_{21}^T = E_{\mathbf{y}, \theta | \delta^*} \left[-\Delta_{\theta}^{\delta} \log p(\mathbf{y} | \theta, \delta) | \delta^* \right] \\ &+ E_{\theta | \delta^*} \left[-\Delta_{\theta}^{\delta} \log p(\theta | \delta^*) \right] \\ H_{22} &= E_{\mathbf{y}, \theta | \delta^*} \left[-\Delta_{\delta}^{\delta} \log p(\mathbf{y} | \theta, \delta) | \delta^* \right] \\ &+ E_{\theta | \delta^*} \left[-\Delta_{\delta}^{\delta} \log p(\theta | \delta^*) \right] \end{aligned}$$

À partir du modèle, on obtient la log-vraisemblance

$$\log p(\mathbf{y} | \theta, \delta^*) = \log \frac{1}{\pi^N | \det(\mathbf{G}) |} - [\mathbf{y} - \mathbf{m}]^H \mathbf{G}^{-1} [\mathbf{y} - \mathbf{m}] \quad (3.55)$$

avec \mathbf{y} le vecteur d'observation N -dimensionnel, \mathbf{m} le vecteur moyenne de \mathbf{y} , où le k^{ieme} élément est $[\mathbf{m}]_k = A_k e^{i\theta_k}$; et la densité de probabilité *a priori*

$$\begin{aligned} \log p(\theta | \delta^*) &= \log p(\theta_1) + (N-1) \log \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_w} \right) \\ &\quad - \sum_{k=2}^N \frac{(\theta_k - \theta_{k-1} - \delta^*)^2}{2\sigma_w^2} \end{aligned} \quad (3.56)$$

- Expression de \mathbf{H}_{11} : on peut écrire

$$\mathbf{H}_{11} = \mathbf{H}_{11}^D + \mathbf{H}_{11}^P \quad (3.57)$$

où

$$\mathbf{H}_{11}^D = E_{y, \theta | \delta^*} \left[-\Delta_\theta^\theta \log p(y | \theta, \delta) | \delta^* \right]$$

$$\mathbf{H}_{11}^P = E_{\theta | \delta^*} \left[-\Delta_\theta^\theta \log p(\theta | \delta^*) \right]$$

On peut voir qu'il y a une équivalence entre ces expressions et celles calculées dans la section précédente: $\mathbf{H}_{11}^D = \mathbf{B}^D$ et $\mathbf{H}_{11}^P = \mathbf{B}^P$.

- Expression de \mathbf{h}_{12} : la log-vraisemblance (eq.3.55) ne dépend pas de δ , alors le premier terme de \mathbf{h}_{12} est nul

$$\mathbf{h}_{12} = E_{\theta | \delta^*} \left[-\Delta_\theta^\delta \log p(\theta | \delta^*) \right]$$

et à partir du modèle d'état, on peut le calculer

$$\mathbf{h}_{12} = \left[\frac{S}{\sigma_w^2} \mathbf{0}_{1 \times N-2} - \frac{S}{\sigma_w^2} \right]^T \quad (3.58)$$

- Expression de H_{22} : étant donné que la log-vraisemblance ne dépend pas de δ , et utilisant eq.(3.56), on peut calculer

$$\begin{aligned} H_{22} &= E_{\theta | \delta^*} \left[-\Delta_\delta^\delta \log p(\theta | \delta^*) \right] \\ &= E_{\theta | \delta^*} \left[-\frac{\partial^2}{\partial \delta^2} \log p(\theta | \delta^*) \right] \\ &= \frac{S(N-1)}{\sigma_w^2} \end{aligned} \quad (3.59)$$

Remarques. Pour la HCRB dans le cas DA, on peut faire les mêmes remarques qu'avec la BCRB. Alors on donne directement que

$$HCRB_{\theta}(\mathbf{a}, S, s) = \left[\mathbf{H}^{-1}(\mathbf{a}) \right]_{N,N} \quad (3.60)$$

$$HCRB_{\delta}(\mathbf{a}, S, s) = \left[\mathbf{H}^{-1}(\mathbf{a}) \right]_{N+1,N+1} \quad (3.61)$$

avec $N = (M - 1) * S + 1 + s$.

9.1.2.3 Comportement des bornes

Dans cette section, on veut tracer les bornes de Cramér-Rao pour l'estimation de phase, et l'estimation conjointe de phase et offset de fréquence, en considérant différents scénarios. Ces bornes montrent, qu'avec le signal suréchantillonné, on peut améliorer les performances d'estimation des paramètres de synchronisation.

On note que le comportement de la BCRB et la HCRB pour l'estimation de phase est très similaire, ainsi on ne présente les courbes que pour la borne hybride. Cela vient du fait que la matrice \mathbf{H}_{11} dans la borne hybride correspond à la BIM \mathbf{B} , et quand on calcule l'inverse de \mathbf{H} , le fait d'avoir \mathbf{h}_{12} et H_{22} à une influence limitée sur $\left[\mathbf{H}^{-1}(\mathbf{a}) \right]_{N,N}$.

On considère la transmission sur un canal avec bruit blanc, Gaussien, additif, d'une séquence binaire à longueur minimale (SBLM) de longueur 511 bits, généré avec un registre à décalages avec polynôme caractéristique $[1021]_8$ (représentation octale). On considère trois facteurs de suréchantillonnage ($S = 1, 2$ et 4) et une mise en forme BOC (voir figure 10). La mise en forme BOC est utilisée dans le système de positionnement Galileo [9]. On suppose que l'on a une estimation de τ , avec une erreur d'estimation τ_o connue.

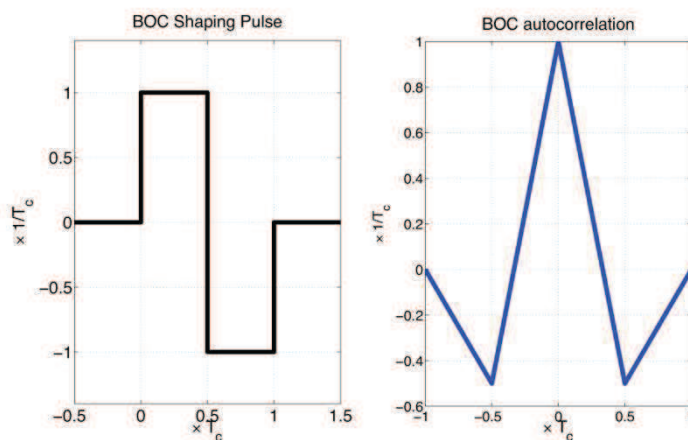


Figure 10: Mise en forme BOC, $p(t)$ et sa fonction d'autocorrélation $g(t)$

Dans les figures, on considère deux cas:

1. On calcule $BCRB(\mathbf{a}, S, 0)$ pour les points de référence (T_c -espacés), pour $S = 1, 2, 4$.
2. On calcule la borne pour les points intermédiaires ($s = S/2$). Ce scénario est intéressant, car les points intermédiaires peuvent être utiles quand on utilise des algorithmes fractionnés (par exemple l'égaliseur "half symbol spaced" ou l'algorithme de récupération de rythme de Gardner, ou encore la boucle "early-late").

Borne HCRB pour les points de référence au pas T_c

La figure 11 superpose, versus le SNR, la HCRB en-ligne, pour deux variances différentes du bruit de phase: une première phase qui varie lentement, $\sigma_w^2 = 0.001 \text{ rad}^2$, et une plus rapide, $\sigma_w^2 = 0.1 \text{ rad}^2$. Dans les deux cas, on suppose une erreur d'estimation du délai nulle, $\tau_o = 0$.

On peut voir que si l'on utilise le signal suréchantillonné on peut gagner, et que ce gain est plus important à bas SNR. Si le SNR augmente, les bornes pour les différentes valeurs de S tendent à se rapprocher, ce qui indique que l'on gagne moins en suréchantillonnant. On note que les performances diminuent si l'on augmente la variance du bruit de phase, et qu'à fort SNR, les bornes tendent vers une asymptote indépendante du bruit de phase.

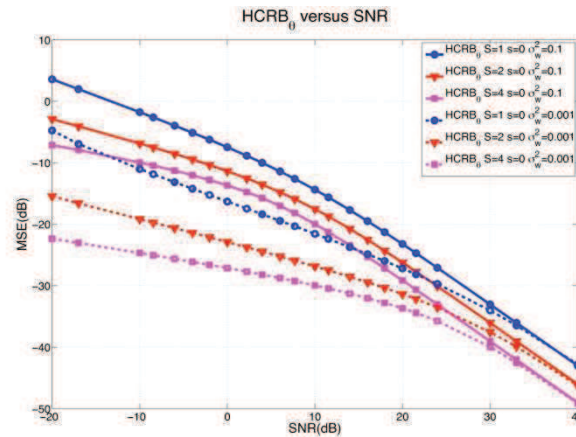


Figure 11: HCRB versus SNR pour trois facteurs de suréchantillonnage $S = 1, 2$ et 4 , et deux valeurs pour la variance du bruit d'observation, $\sigma_w^2 = 0.001 \text{ rad}^2$ et $\sigma_w^2 = 0.1 \text{ rad}^2$.

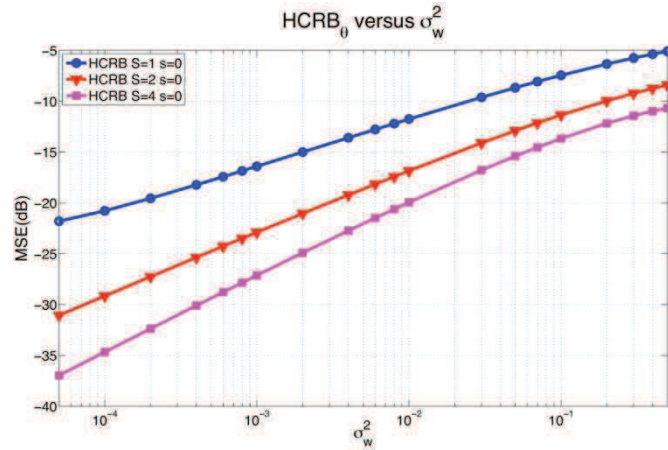


Figure 12: HCRB versus la variance du bruit de phase, pour trois facteurs de suréchantillonnage, $S = 1, 2$ et 4 , $\text{SNR} = 0$ dB.

Dans la figure 12, on trace le comportement de la borne versus la variance du bruit de phase, pour une valeur du SNR fixé (0 dB). On peut encore voir le gain possible avec une synchronisation fractionnée. Le gain obtenu est plus fort à faible variance σ_w^2 .

La figure 13 superpose, versus le SNR, la borne HCRB en-ligne, $HCRB_\theta(\mathbf{a}, S, 0)$, pour une variance du bruit de phase modérée, $\sigma_w^2 = 0.01$, et une erreur d'estimation de τ connue, $\tau_o = \frac{T_c}{8}$.

Pour $\tau_o \neq 0$, la borne indique que les performances sont moins bonnes, ce qui est assez intuitif, car on a une mauvaise estimation du délai. La borne est de plus en plus mauvaise, quand on augmente τ_o .

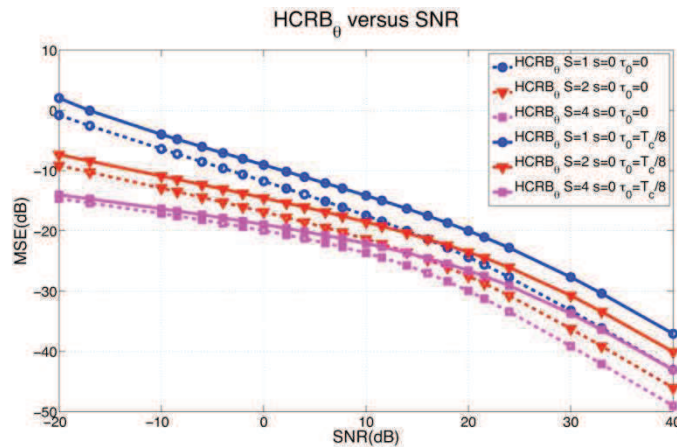


Figure 13: HCRB versus le SNR, pour trois facteurs de suréchantillonnage différents, $S = 1, 2$ et 4. On considère une variance du bruit de phase $\sigma_w^2 = 0.01 \text{ rad}^2$ et une erreur d'estimation du délai

$$\tau_o = \frac{T_c}{8}.$$

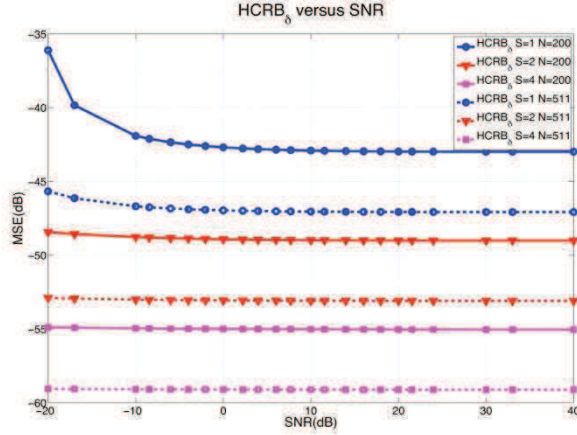


Figure 14: $HCRB_\delta$ versus le SNR, pour trois facteurs de suréchantillonnage, $S = 1, 2$ et 4. On considère une variance du bruit de phase $\sigma_w^2 = 0.01 \text{ rad}^2$.

La figure 14 superpose, versus le SNR, la borne HCRB en-ligne, pour l'estimation de l'offset de fréquence δ , $HCRB_\delta(\mathbf{a}, S, 0)$, pour deux tailles du bloc d'observation différentes, $N = 200$ et $N = 511$. On considère une variance du bruit d'observation $\sigma_w^2 = 0.01$. Les performances s'améliorent avec la taille du bloc d'observation N , car on estime une valeur constante. Les performances augmentent avec le facteur de suréchantillonnage S , et contrairement à la borne de phase, tend vers 0 si l'on a $N \rightarrow \infty$.

Borne HCRB pour les points intermédiaires T_c -espacés. Pour $S = 1$, on a seulement 1 échantillon dans chaque symbole, alors, pour comparer avec $S = 2, 4$, on doit générer les points intermédiaires qui manquent. On génère ces points, en gardant la valeur estimée ($s = 0$) sur toute la période.

On peut calculer la HCRB pour les points intermédiaires du cas $S = 1$

$$HCRB_{\theta-b}(\mathbf{a}, 1, 1/2) = HCRB_\theta(\mathbf{a}, 1, 0) + \sigma_w^2 / 2.$$

Pour $S > 1$, la borne dépend fortement de la dernière valeur observée A_N , à cause de la puissance non-stationnaire. Dans ce cas, on renomme la borne comme $BCRB(A_N, S, s)$. Pour $\tau_o = 0$, $|A_N|$ vaut 0 ou 1 (voir fig.9), alors il y a deux bornes possibles. On peut définir une nouvelle borne moyenne:

$$HCRB_{\theta}(S, s) = p_0 \cdot HCRB_{\theta}(|A_N| = 0, S, s) + (1 - p_0) \cdot HCRB_{\theta}(|A_N| = 1, S, s) \quad (3.62)$$

où p_0 est la proportion de valeurs $A_k = 0$.

9.1.3 Conclusion

Ce chapitre a étudié le problème de synchronisation fractionnée. Dans la section 3.1, on a présenté une modélisation simple qui permet d'inclure les bruits colorés dans le modèle d'état, ce qui rend possible l'estimation conjointe des paramètres de synchronisation et prendre en compte la coloration du bruit d'observation. Ensuite, basé sur ce modèle, on a établi la borne de Cramér-Rao Bayésienne pour le problème d'estimation de phase et la borne de Cramér-Rao hybride, pour le problème d'estimation conjointe de phase et offset de fréquence.

Dans les systèmes de communication courants, le roll-off est compris entre 0 et 100% ; ainsi, un ou deux échantillons par symbole sont suffisants pour récupérer l'information du signal analogique, mais dans le contexte des systèmes GNSS, les fonctions de mise en forme utilisées ne vérifient pas le théorème d'échantillonnage de Nyquist-Shannon (roll-off $\gg 100\%$). Ces conditions spéciales, nous laissent espérer une amélioration des performances si l'on utilise un signal suréchantillonné. Les bornes montrent ce possible gain.

Les résultats présentés dans ce chapitre, ont été, en partie, publiés dans [153], [151], [150]:

9.2 Synchronisation fractionnée: méthodes d'estimation

Dans le chapitre précédent, on a présenté une modélisation pour traiter le problème de la synchronisation *fractionnée*. Ensuite, les bornes de Cramér-Rao associées aux problèmes d'estimation de phase, d'estimation conjointe de phase et offset de fréquence, et de délai, ont été calculées.

Le présent chapitre est lié directement au chapitre précédent. On propose des algorithmes pour résoudre le problème de la synchronisation fractionnée. Les sections 9.2.1, 9.2.2 présentent respectivement, une solution aux problèmes d'estimation de phase, estimation conjointe de phase et décalage de fréquence.

9.2.1 Estimation de phase

On a présenté le modèle de signal pour l'estimation de phase et l'on a établi la borne de Cramér-Rao associée dans le chapitre précédent. Dans cette section, à présenter les résultats obtenus en appliquant les méthodes de filtrage au modèle, et comparer les résultats avec la BCRB de la section précédente. Principalement on a utilisé le filtre de Kalman étendu pour résoudre le problème, et l'on a comparé les résultats obtenus avec les méthodes particulières.

9.2.1.1 Algorithmes pour l'estimation dynamique de phase

EKF

Le problème étant non-linéaire, on ne peut pas appliquer directement le KF, et l'on doit linéariser le problème et appliquer le KF étendu. Dans ce cas, d'après le modèle de signal (eqs.(3.27,3.28) sans dérive), on voit que $\mathbf{F}_k^* = \mathbf{M}_K$ (sans dérive), car le modèle d'état est linéaire, et

$$H_k^* = \frac{\partial \mathbf{h}_k(\hat{\mathbf{x}}_{k|k-1})}{\partial \mathbf{x}_k} = \begin{bmatrix} iA_k e^{i\hat{\theta}_{k|k-1}} & 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}^T \quad (4.1)$$

La matrice de covariance du bruit d'état, \mathbf{Q}_k , est indépendante de k , et a seulement deux valeurs non-nulles: $[\mathbf{Q}]_{1,1} = \sigma_w^2 / S$ et $[\mathbf{Q}]_{3,3} = \sigma_n^2$. Étant donné que l'on a introduit le bruit coloré b_k dans l'état, à des fins pratiques, on n'a pas de bruit d'observation, et la matrice de covariance \mathbf{R}_k est nulle. Si l'on introduit cela dans l'algorithme EKF, on obtient l'algorithme pour l'estimation dynamique de phase.

Les résultats obtenus vont dépendre du facteur de suréchantillonnage S , et de l'indice s . On note $MSE_{EKF}(S, s)$, la MSE obtenue avec un EKF qui travaille en utilisant les s^{eme} points d'un signal suréchantillonné avec un facteur S .

Méthodes particulières

Si l'on veut appliquer une méthode particulière au problème d'estimation de phase, on doit tout d'abord décider quelle fonction d'importance et quel type de re-échantillonnage on veut utiliser, et éventuellement voir si l'on peut appliquer la Rao-Blackwellisation ou pas.

Dans notre cas, on choisit d'utiliser comme fonction d'importance la densité de transition *a priori* de l'état, $p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1})$, et un re-échantillonnage résiduel. Étant donné notre choix, les poids vont évoluer selon la fonction de vraisemblance $p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k)$. Pour faire évoluer les particules on utilise la fonction d'importance de la façon suivante

$$\mathbf{x}_k^{(i)} \sim p(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}^{(i)}) \quad (4.2)$$

ce qui est facile dans notre modèle, car il suffit de générer des bruits Gaussiens, et faire évoluer les particules à partir des particules obtenues dans l'itération précédente, selon le modèle d'état.

9.2.1.2 Discussion

Ici, on illustre le comportement de l'EKF en considérant différents scénarios, et l'on compare ses performances avec la BCRB. On compare aussi, les résultats obtenus, avec une méthode particulière et une méthode déterministe, pour justifier l'utilisation de l'EKF, et l'on analyse les pertes de performance quand on utilise une mise en forme à bande limitée. On considère, comme on l'a fait pour les bornes, la transmission sur un canal avec bruit blanc, Gaussien, additif, d'une séquence SBLM de longueur 511 bits, générée avec un registre à décalages avec polynôme caractéristique $[1021]_8$ (représentation octale). On considère trois facteurs de suréchantillonnage ($S = 1, 2$ et 4) et une mise en forme BOC (voir figure 10).

Dans les figures, on trace la MSE obtenue avec des simulations Monte Carlo versus le rapport signal sur bruit. Le SNR correspond au rapport porteuse sur bruit ($\frac{C}{N}$) à l'entrée du récepteur. Dans notre cas, la mise en forme et les symboles a_k sont normalisés (*i.e.* $\sigma_a^2 = 1; g(0) = 1$), et ce rapport est simplement $\frac{C}{N} = \frac{1}{\sigma_n^2}$.

La figure 16, montre une réalisation du filtre de Kalman étendu pour l'estimation de phase. On peut voir que l'on a une estimation correcte. Dans la suite on fait une analyse des performances en calculant la MSE sur un nombre élevé de réalisations.

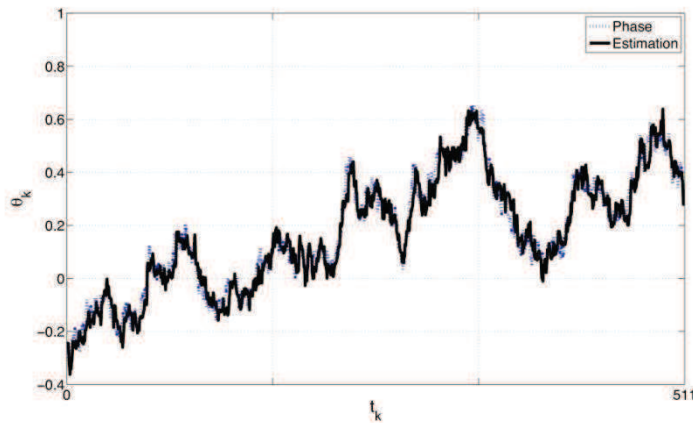


Figure 16: Estimation de phase avec $S = 2$, $\sigma_w^2 = 0.001$, $\sigma_n^2 = 0.1$

Pour la MSE on considère deux cas:

1. On calcule $BCRB(\mathbf{a}, S, 0)$ et $MSE_{EKF}(S, 0)$ pour les points de référence au pas T_c , pour $S = 1, 2, 4$.
2. On calcule le MSE pour les points intermédiaires ($s = S / 2$).

On utilisera le même scénario dans la section d'estimation conjointe de phase et offset de fréquence.

Estimation avec les points de référence au pas T_c

La figure 17 superpose, versus le SNR, la BCRB en-ligne (voir eq.(3.49)) et la MSE obtenue avec l'EKF. On a deux cas: le premier considère une phase qui varie lentement, avec une variance du bruit de phase $\sigma_w^2 = 0.001 \text{ rad}^2$, et le deuxième, on considère un phase avec une évolution rapide, $\sigma_w^2 = 0.01 \text{ rad}^2$. Dans les deux scénarios, l'erreur dans l'estimation du délai est nulle, $\tau_o = 0$, ou ce qui est équivalent, on considère le délai parfaitement synchronisé.

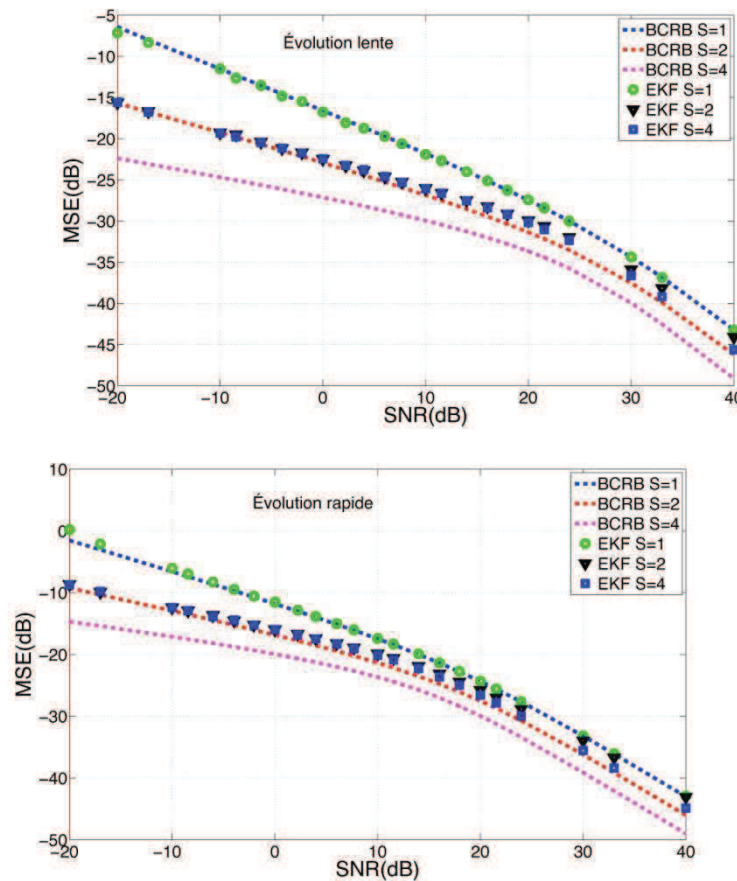


Figure 17: MSE pour l'EKF et BCRB versus le SNR pour trois facteurs de suréchantillonnage $S = 1, 2$ et 4 , avec une variance du bruit de phase $\sigma_w^2 = 0.001 \text{ rad}^2$ (évolution lente) et $\sigma_w^2 = 0.01 \text{ rad}^2$ (évolution rapide).

Pour $S = 1$, la performance de l'EKF coïncide avec la BCRB, alors on ne peut pas faire mieux.

Pour $S = 2$, les performances de l'EKF sont un petit peu moins bonnes, mais on est très proche de la borne. Pour $S = 4$, la MSE obtenue, est un peu meilleur qu'avec $S = 2$ à haut SNR; en outre, l'EKF ne

coïncide plus avec la borne. On n'obtient pas des meilleures performances en utilisant $S = 4$, parce que les échantillons que l'on ajoute sont nuls (voir fig. 9), alors on n'a pas d'information en plus.

Le gain obtenu augmente avec le facteur de suréchantillonnage S , et l'intérêt de suréchantillonner est clair à bas SNR, ce qui est le cas dans les communications par satellite. Le gain grâce au suréchantillonnage diminue quand le SNR augmente.

Dans la figure 18, on analyse le comportement de l'EKF avec la variance du bruit de phase, pour un SNR fixé. On considère le cas d'un SNR faible (0 dB). Ici, on peut encore mesurer le gain de performance apporté par le suréchantillonnage et le bon fonctionnement de l'algorithme.

L'amélioration est plus importante à faible variance σ_w^2 , et dans ce cas on est sur la borne. Quand on a une variance σ_w^2 très importante, les performances s'éloignent de la borne, ce qui est normal, car à forte variance, l'erreur de linéarisation dans l'EKF n'est pas négligeable, par rapport au niveau de bruit d'observation.

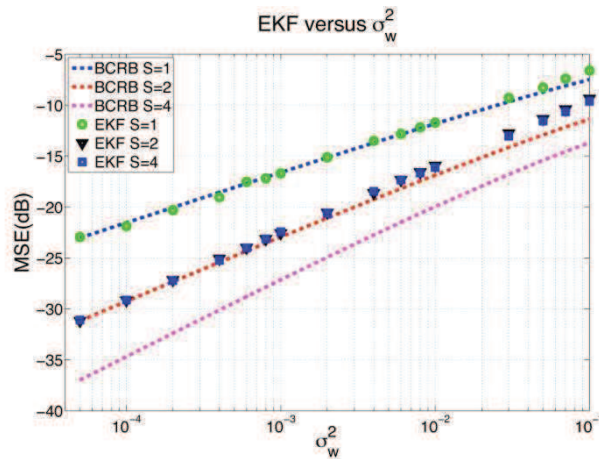


Figure 18: EKF MSE et BCRB versus la variance du bruit de phase pour trois facteurs de suréchantillonnage $S = 1, 2$ and 4 , SNR = 0 dB.

La figure 19 superpose, versus le SNR, la BCRB en-ligne, $BCRB(S, 0)$, et le EKF pour une phase avec une variation faible, $\sigma_w^2 = 0.001$, mais avec un erreur connue dans la synchronisation du délai,

$\tau = \frac{T_c}{8}$. On considère deux facteurs de suréchantillonnage $S = 1, 2$. On trace, comme référence, les

performances de l'EKF pour la même variance et $\tau_o = 0$. On voit que pour $\tau_o \neq 0$, la borne et l'algorithme ont des performances moins bonnes. Le gain entre différents facteurs de suréchantillonnage est plus grand à fort SNR avec un décalage non-nul.

LURGA

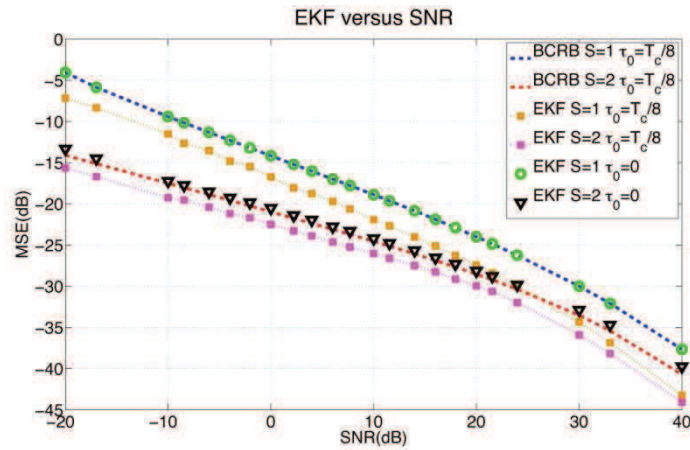


Figure 19: EKF MSE et BCRB versus le SNR, en présence d'une mauvaise synchronisation (connue) du délai, pour deux facteurs de suréchantillonnage $S = 1$ and 2 .

Pour montrer que les performances sont de moins en moins bonnes, au fur à mesure que τ_0 augmente, on trace dans la figure 20, la BCRB en-ligne et l'EKF versus τ_0 . On considère $0 \leq \tau_0 < \frac{T_c}{4}$, un rapport signal sur bruit fixé, $\text{SNR} = 0$ dB et une phase à évolution lente, $\sigma_w^2 = 0.001$. On note que les performances pour $S = 4$ sont symétriques en τ , chaque $\frac{T_c}{8}$, pour $S = 2$ chaque $\frac{T_c}{4}$, et pour $S = 1$ chaque $\frac{T_c}{2}$.

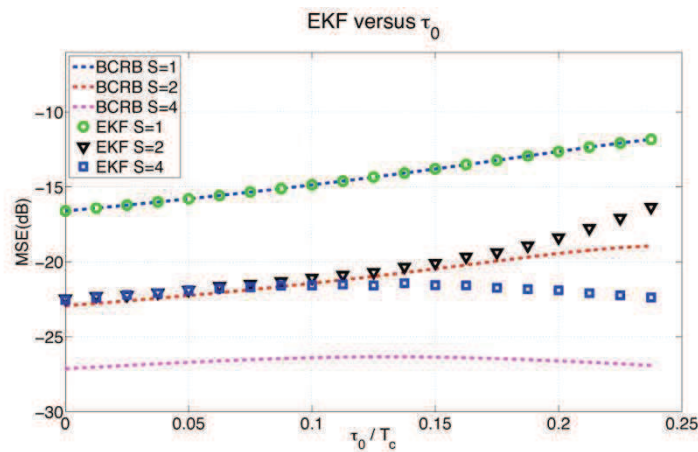


Figure 20: EKF MSE et BCRB versus τ_0 pour $\text{SNR} = 0$ dB et $\sigma_w^2 = 0.001$.

Estimation avec les points intermédiaires T_c -espacés

LURGA

Dans cette partie, on prend le cas $S = 4$ comme référence. Pour $S = 1$, on a seulement 1 valeur estimée par symbole, alors, pour comparer avec $S = 2, 4$, on doit générer les points intermédiaires qui manquent. On obtient ces points intermédiaires, en gardant la valeur estimée ($s = 0$) sur toute la période. On note $MSE_{EKF}(1, 1/2)$.

La BCRB pour les point intermédiaires dans le cas $S = 1$, peut être calculée facilement comme

$$BCRB_b(\mathbf{a}, 1, 1/2) = BCRB(\mathbf{a}, 1, 0) + \sigma_w^2 / 2. \quad (4.3)$$

Comme on a fait dans la section 3.2.3, on peut définir une nouvelle borne moyenne:

$$\begin{aligned} BCRB(S, s) &= p_0 \cdot BCRB(|A_N| = 0, S, s) \\ &+ (1 - p_0) \cdot BCRB(|A_N| = 1, S, s) \end{aligned} \quad (4.4)$$

où p_0 est la proportion de $A_k = 0$. Cette borne moyenne est complètement adaptée pour comparer avec la MSE obtenue avec un EKF qui utilise la même proportion p_0 . Dans notre simulation $p_0 = 0.5$.

Résultats. Pour le cas des points intermédiaires, la figure 21 superpose, versus le SNR, les BCRBs en-ligne ($BCRB_b(1, 1/2)$, $BCRB(2, 1)$, $BCRB(4, 2)$) et la MSE obtenue avec l'EKF pour une phase à évolution rapide, avec variance $\sigma_w^2 = 0.01 \text{ rad}^2$, et $\tau = 0$.

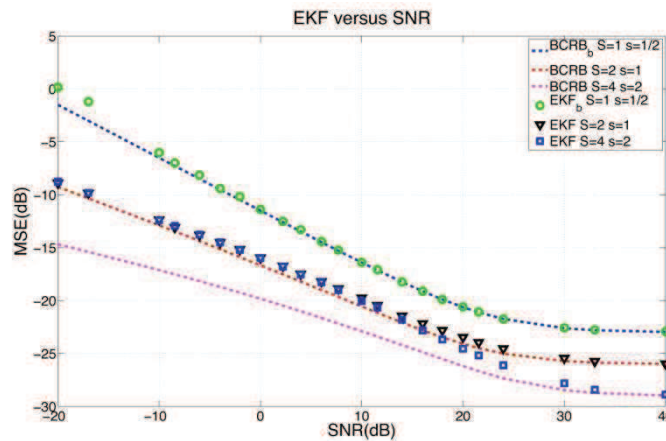


Figure 21: EKF et BCRB versus le SNR pour les points intermédiaires, trois facteurs de suréchantillonnage $S = 1, 2$ et 4 , et une variance du bruit de phase $\sigma_w^2 = 0.01 \text{ rad}^2$.

Pour $S = 1$ et 2 , la variance de l'EKF est proche de la BCRB. Pour $S = 4$, à faible SNR, la MSE obtenue avec l'EKF est presque le même que pour $S = 2$, mais à fort SNR, il tend vers la borne.

Le gain augmente avec le facteur de suréchantillonnage, et l'intérêt de suréchantillonner est plus important à faible SNR. À fort SNR, $MSE \rightarrow \sigma_w^2 / 2S$, à cause du procédé de blocage pour $S = 1$,

et à cause de la puissance non-stationnaire de la séquence A_k pour $S = 2$ et 4 . On peut voir cette saturation dans l'eq. (4.4), qui devient à fort SNR, pour $p_0 = 0.5$

$$BCRB(S, s) \sim \frac{1}{2} BCRB(0, S, s) \quad (4.5)$$

et alors, $BCRB(0, S, s) = \sigma_w^2 / S$. Si l'on compare la performance de l'algorithme dans ce cas, avec les performances pour $s = 0$ (voir fig.17), on obtient le même résultat à faible SNR, mais des performances moins bonnes à fort SNR, à cause de la saturation.

Comparaison entre l'EKF et d'autres méthodes Bayésiennes

Dans cette partie on compare les performances de l'EKF avec une méthode particulière (PF avec rééchantillonnage résiduel).

La comparaison est faite dans le cas qui utilise les points de référence. Les paramètres qui ne sont pas spécifiés, sont les mêmes que ceux utilisés au début de la section.

La figure 22 superpose, versus le SNR, la BCRB en-ligne et la MSE obtenues avec deux algorithmes différents: l'EKF et un PF qui utilise 200 particules pour une phase de variance modérée $\sigma_w^2 = 0.01 \text{ rad}^2$ et $\tau_o = 0$.

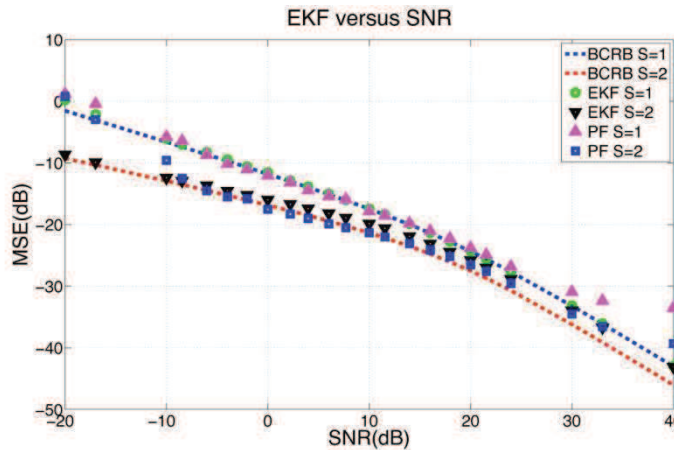


Figure 22: EKF, PF et BCRB versus le SNR pour deux facteurs de suréchantillonnage $S = 1, 2$, avec une variance du bruit de phase $\sigma_w^2 = 0.01 \text{ rad}^2$.

Pour $S = 1$, les résultats obtenus avec le PF sont les mêmes qu'avec l'EKF, sauf à fort SNR, où le PF sature, ce qui est normal, car un fort SNR signifie un bruit d'observation très faible, et le PF ne marche pas si l'on n'a pas du bruit d'observation. Pour $S = 2$, la performance du PF est presque la même

que celle obtenue avec l'EKF, entre 5 dB et 25 dB, mais moins bonne ailleurs, c'est-à-dire, sans bruit ou avec un bruit très fort.

La complexité et charge de calcul du PF est beaucoup plus forte qu'avec l'EKF, qui est la méthode de filtrage nonlinéaire la plus simple, car on doit évaluer les fonctions pour chaque particule. Sa charge de calcul augmente de manière linéaire avec le nombre de particules. Dans notre cas, en utilisant 200 particules, l'EKF est 10 fois plus rapide que le PF, pour des résultats presque identiques. Pour ces raisons, dans ce type de problème, légèrement non-linéaire et avec une dimension de l'état faible, l'EKF reste la meilleure option.

Analyse dans des conditions réelles

Dans cette section, on trace les performance obtenues avec l'EKF, si l'on considère une mise en forme réelle, à bande limitée. Dans ce cas, on prend une mise en forme BOC à bande limitée, qui est une fonction BOC convoluée avec une fonction sinc dans le domaine temporel.

On présente dans la figure 23, la comparaison entre les résultats obtenus avec la fonction BOC idéale et une fonction BOC à bande limitée, qui serait celle que l'on aurait dans une application réelle.

Cette fonction BOC à bande limitée est obtenue en filtrant la fonction BOC idéale, avec une fonction $\text{sinc}(\pi Wt)$. On note que pour Galileo, on a un taux chip de $1/T_c = 10$ Mchip/s, et la largeur de bande du récepteur est $W = 20$ MHz (*i.e* $2/T_c$) ou $W = 40$ MHz (*i.e* $4/T_c$), ce qui permet d'utiliser, respectivement, $S = 2$ ou $S = 4$, échantillons/symbole, ce qui est normal dans les récepteurs satellite.

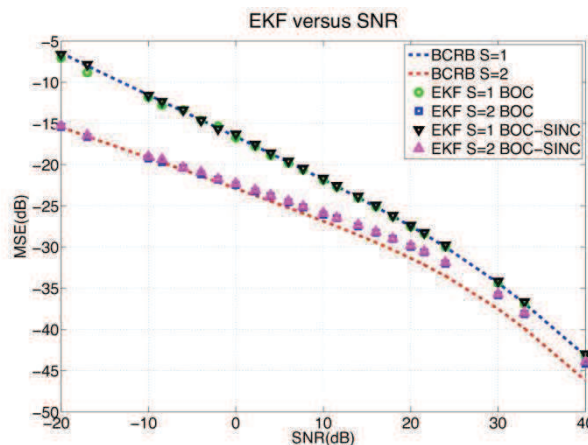


Figure 23: EKF MSE pour deux fonctions BOC et BCRB, versus le SNR pour deux facteurs de suréchantillonnage $S = 1, 2$, avec une variance du bruit de phase $\sigma_w^2 = 0.001 \text{ rad}^2$. $W = 4/T_c$.

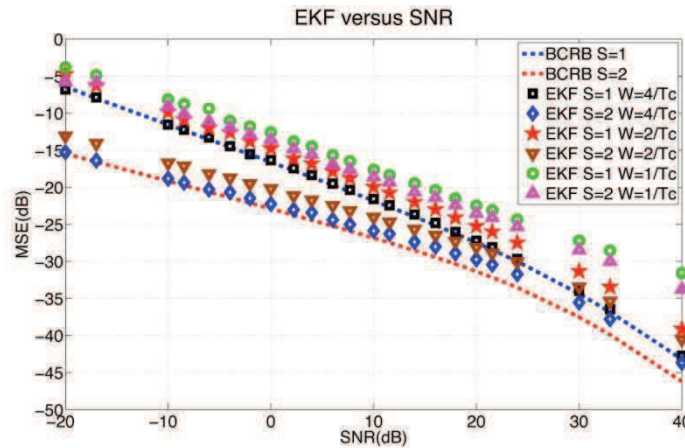


Figure 24: EKF MSE pour une fonction de mise en forme BOC à bande limité ($W = 1/T_c, 2/T_c$ et $4/T_c$) versus le SNR, pour deux facteurs de suréchantillonnage $S = 1, 2$, avec une variance du bruit de phase $\sigma_w^2 = 0.001 \text{ rad}^2$.

On présente les résultats obtenus avec une variance du bruit de phase $\sigma_w^2 = 0.001 \text{ rad}^2$, $\tau_o = 0$ et une largeur de bande $W = 4/T_c$.

Les résultats utilisant la fonction BOC à bande limitée, sont les mêmes qu'avec une fonction BOC idéale, car la largeur de bande du récepteur est suffisamment grande.

Dans la figure 24, on présente les résultats obtenus dans le même scénario, mais en utilisant une fonction sinc avec trois largeurs de bande différentes, $W = 4/T_c, 2/T_c$ et $1/T_c$. On peut voir que dans le premier cas, $W = 4/T_c$, les résultats sont les mêmes qu'avec la fonction BOC idéale. En utilisant $W = 2/T_c$ et $W = 1/T_c$, la largeur de bande n'est pas suffisante et les performances sont moins bonnes (perte de 2.5 dB pour $W = 2/T_c$ et jusqu'à 8 dB pour $W = 1/T_c$ et $S = 2$). Étant donné qu'il est normal d'utiliser $S = 4$ échantillons/symbole dans les récepteurs satellite, on peut conclure que les résultats obtenus avec la BOC idéale, sont corrects dans un scénario réel.

Note: si l'on considèrait des bits de données, à bas débit, superposés à la séquence d'apprentissage, l'algorithme ne fonctionne pas correctement si la valeur qui module est -1 . On pourrait résoudre facilement ce problème en considérant que l'on peut démarrer l'algorithme pour les deux valeurs possibles en parallèle, $+1$ et -1 , et rapidement détecter la valeur correcte, par exemple, à partir de la covariance d'estimation du filtre de Kalman. Une fois détecté, on laisse tourner seulement l'algorithme avec la valeur correcte.

9.2.2 Estimation conjointe de phase et offset de fréquence

Dans cette section, on étudie le problème d'estimation conjointe de phase et décalage fréquentiel. La structure de la section est la même que la précédente. On note que les résultats pour l'estimation de phase, sont similaires à ceux présentés dans la section 4.1, ainsi on ne présente que quelques scénarios.

On utilise le modèle présenté dans la section 3.1 (eqs. (3.27,3.28)), et le filtre de Kalman présenté dans la section 2.2. On compare les résultats à la borne hybride HCRB (voir section 3.2). On obtient le filtre de Kalman pour l'estimation conjointe de phase et offset de fréquence, comme dans la section précédente.

9.2.2.1 Discussion

La figure 25, montre une réalisation du filtre de Kalman étendu pour l'estimation de phase avec un offset de fréquence $\delta = 0.002$. On peut voir dans ce cas que l'évolution de la phase est fortement perturbée par la dérive de fréquence (pente ascendante intrinsèque), mais que l'on a une estimation correcte. On note que la vraie valeur de phase est modulo 2π .

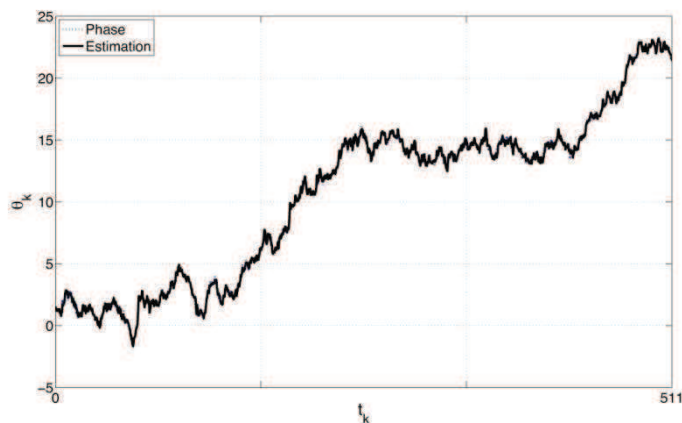


Figure 25: Estimation de phase avec $S = 2$, $\sigma_w^2 = 0.1$, $\sigma_n^2 = 0.1$, $\delta = 0.002$

Dans la suite on fait une analyse des performances en calculant la MSE sur un nombre élevé de réalisations. On utilise le même scénario que l'on a présenté dans la section 4.1, et on prend une dérive de fréquence $\delta = 0.2$.

Estimation avec les points de référence au pas T_c

La figure 26 superpose, versus le SNR, la borne HCRB en-ligne et l'EKF MSE. On considère une variance à évolution modérée, $\sigma_w^2 = 0.01 \text{ rad}^2$, et une synchronisation parfaite du délai, $\tau_o = 0$.

Pour $S = 1$, les performances de l'EKF coïncident avec la HCRB, sauf à bas SNR, où on obtient des mauvais résultats. Pour $S = 2$, la MSE obtenue avec l'EKF est légèrement moins bonne que la

borne. Pour $S = 4$, la MSE est un peu meilleure que celle que l'on obtient avec $S = 2$, à fort SNR; en plus, dans ce cas, l'EKF ne coïncide plus avec la borne, ce qui est normal, car les échantillons que l'on ajoute avec $S = 4$, sont nuls, et n'apportent pas d'information (voir fig. 9).

On peut voir qu'en suréchantillonnant on gagne, et que ce gain est plus important à bas SNR. Au fur et à mesure que le SNR augmente, le gain diminue. Le gain en performance entre facteurs de suréchantillonnage S , diminue quand la variance du bruit d'état σ_w^2 augmente.

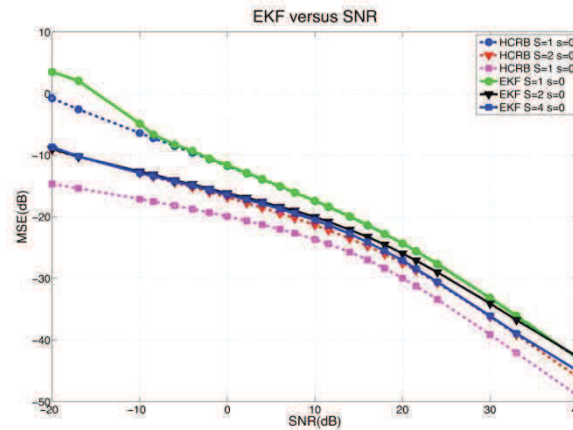


Figure 26: EKF et HCRB versus le SNR pour trois facteurs de suréchantillonnage, $S = 1, 2$ et 4 , avec une variance du bruit de phase $\sigma_w^2 = 0.01 \text{ rad}^2$.

Dans la figure 27, on analyse le comportement de la HCRB et le EKF, pour un SNR fixé, versus la variance du bruit de phase. On présente un scénario avec un SNR bas, $SNR = 0 \text{ dB}$. Dans ce cas, on peut encore mesurer le gain apporté par le suréchantillonnage et les bonnes performances de l'algorithme. Le gain est plus important à faible σ_w^2 . On note que les performances à variance faible, sont très proches de la borne. À fort σ_w^2 , les performances sont de plus en plus mauvaises, ce qui est normal, car à forte variance, l'erreur de linéarisation dans l'EKF n'est pas négligeable, par rapport au niveau de bruit d'observation.

LURGA

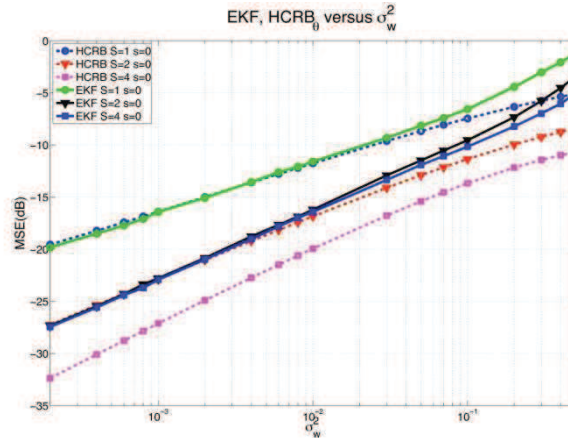


Figure 27: EKF et HCRB versus la variance du bruit de phase, pour $S = 1, 2$ et 4 , et $\text{SNR} = 0$ dB.

Si l'on considère le problème d'estimation de la dérive, on voit que les performances d'estimation dépendent de la taille du bloc d'observations N , car le paramètre à estimer est constant. La figure 28 superpose, versus le SNR, l'EKF MSE et la borne HCRB pour l'estimation de l'offset de fréquence ($MSE_{EKF}(S, 0)$ and $HCRB_\delta(\mathbf{a}, S, 0)$). On considère une variance du bruit de phase modérée $\sigma_w^2 = 0.01$, $S = 1, 2, 4$ et une taille fixée à $N = 511$.

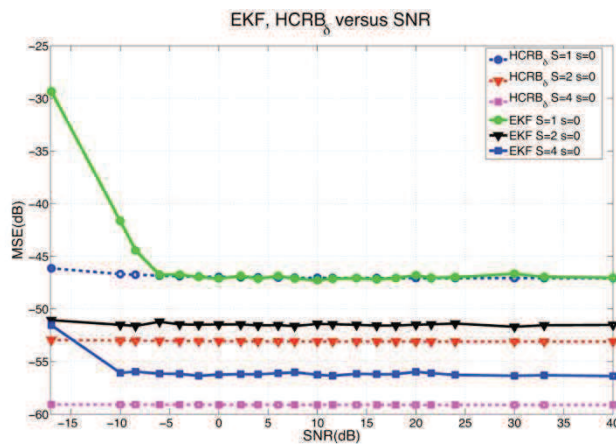


Figure 28: $MSE_{EKF}(S, 0)$ et $HCRB_\delta$ versus le SNR, pour $S = 1, 2$ et 4 . On considère une variance $\sigma_w^2 = 0.01 \text{ rad}^2$.

Pour $S = 1$, l'EKF MSE coïncide avec la borne, sauf à très bas SNR, où les performances sont moins bonnes. Pour $S = 2$ et 4 , l'EKF MSE est proche de la borne. On note que l'on a un gain qui augmente avec S .

Estimation avec les points intermédiaires T_c -espacés

Pour $S = 1$, on a seulement 1 valeur estimée dans chaque symbole, alors, pour comparer avec $S = 2, 4$ on doit générer les points intermédiaires qui manquent. On génère ces points, en gardant la valeur estimée ($s = 0$) sur toute la période.

On peut calculer la HCRB pour les points intermédiaires du cas $S = 1$

$$HCRB_{\theta-b}(\mathbf{a}, 1, 1/2) = HCRB_{\theta}(\mathbf{a}, 1, 0) + \sigma_w^2 / 2.$$

Pour $S > 1$, comme dans la section 4.1, on définit une borne moyenne comme

$$HCRB_{\theta}(S, s) = p_0 \cdot HCRB_{\theta}(|A_N| = 0, S, s) + (1 - p_0) \cdot HCRB_{\theta}(|A_N| = 1, S, s) \quad (4.6)$$

où p_0 est la proportion d' $A_k = 0$.

Pour le cas de points intermédiaires, la figure 29 superpose, versus le SNR, la MSE obtenue avec l'EKF et la borne HCRB, pour une phase à évolution rapide $\sigma_w^2 = 0.01 \text{ rad}^2$, et $\tau = 0$. Cet scénario est intéressant quand on utilise des méthodes fractionnées.

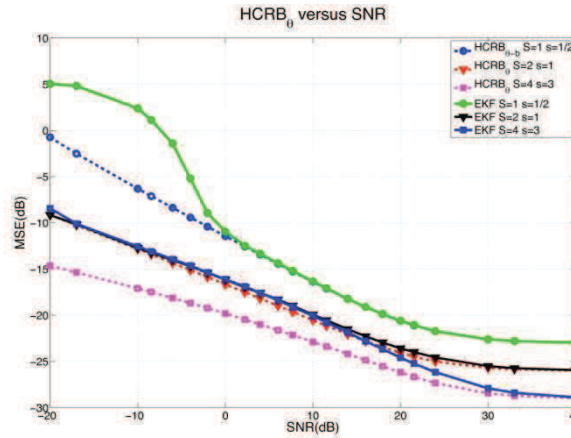


Figure 29: EKF et HCRB versus le SNR pour les points intermédiaires, $S = 1, 2$ et 4 , et la variance de bruit de phase est $\sigma_w^2 = 0.01 \text{ rad}^2$.

Pour $S = 1$, les performances coïncident avec la borne, à SNR moyen et fort, mais à bas SNR, on a une dégradation importante. Pour $S = 2$, la MSE est très proche de la borne, et pour $S = 4$, à bas SNR, le MSE est presque le même que pour $S = 2$, et tend vers la borne à fort SNR. Dans tous les cas, les performances pour $S > 1$ sont meilleures que pour $S = 1$.

9.2.3 Conclusion

Ce chapitre a étudié le problème de synchronisation fractionnée. Les systèmes GNSS utilisent des fonctions de mise en forme qui ne vérifient pas le théorème d'échantillonnage de Nyquist-Shannon (roll-off $\gg 100\%$), ce qui nous laisse espérer une amélioration des performances si l'on utilise un signal suréchantillonné.

On a appliqué l'EKF pour résoudre le problème d'estimation de phase, d'estimation conjointe de phase et offset de fréquence, et dans le cas d'estimation de délai. Dans le cas d'estimation de phase, on a comparé les performances de l'EKF avec une méthode particulière, montrant que dans ce problème ce n'était pas nécessaire d'utiliser des méthodes si compliquées. On a aussi fait l'étude dans des conditions réelles, utilisant une fonction de mise en forme BOC à bande limitée.

Cette étude, montre plusieurs améliorations, quand on utilise une méthode fractionnée pour l'estimation. La MSE d'estimation diminue quand on augmente le facteur S , et l'intérêt de suréchantillonner est clair à bas SNR, ce qui est le cas dans les communications par satellite.

Les résultats présentés dans ce chapitre, ont été, en partie, publiés dans [153][152][149].

References liées à l'annexe 3 (chapitre 9)

- [1] H. Abeida and J.-M. Brossier and L. Ros and J. Vilà-Valls. An EM algorithm for path delay and complex gain estimation of slowly varying fading channel for CPM signals. Honolulu, Hawaii, 2009. Proc. of the IEEE Global Communications Conference, Globecom 2009.
- [2] J. S. Abel. A bound on mean-square-estimate error. *IEEE Trans. on Information Theory*, 39(5):1675-1680, 1993.
- [3] T. Albery. Frequency domain interpretation of the Cramér-Rao bound for carrier and clock synchronization. *IEEE Trans. on Communications*, 43(2/3/4):1185-1191, 1995.
- [4] B. Anderson and J. B. Moore. *Optimal filtering*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, USA, 1979.
- [5] I. Arasaratnam and S. Haykin. Cubature Kalman Filters. *IEEE Trans. Automatic Control*, 54(6):1254-1269, 2009.
- [6] T. Bertozzi. *Applications of Particle Filtering Methods to Digital Communications*. PhD thesis, Conservatoire National des Arts et Métiers, Paris, France, 2003.
- [7] P. Closas. *Bayesian signal processing techniques for GNSS receivers*. PhD thesis, Universitat Politècnica de Catalunya, Baelona, Espagne, 2009.

[8] H. Cramér. *Mathematical Methods of Statistics*. Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, USA, 1946.

[9] ESA. Galileo Open Service Signal in Space Interface Control Document - Draft 1. Technical report, European Space Agency / Galileo Joint Undertaking, 2008.

[10] W. C. Jakes. *Microwave mobile communications*. Wiley, New York, USA, 1974.

[11] A. H. Jazwinski. *Stochastic Processes and Filtering Theory*. Academic Press, New York, USA, 1970.

[12] S. M. Kay. *Fundamentals of Statistical Signal Processing: Estimation Theory*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, USA, 1993.

[13] U. Mengali and A. N. D'Andrea. *Synchronization Techniques for Digital Receivers*. Plenum Press, New York, USA, 1997.

[14] H. Meyr and M. Moeneclaey and S. Fetchel. *Digital Communication Receivers: Synchronization, Channel Estimation and Signal Processing*. Wiley Series in Telecommunications and Signal Processing, New York, USA, 1998.

[15] J. G. Proakis. *Digital Communications*. McGraw-Hill, Boston, USA, 2000.

[16] A. Renaux. *Contribution à l'analyse des performances d'estimation en traitement statistique du signal*. PhD thesis, École Normale Supérieure de Cachan, Cachan, France, 2006.

[17] H. L. Van Trees. *Detection, estimation, and modulation theory: Part I*. Wiley, New York, USA, 1968.

[18] H. L. Van Trees and K. L. Bell. *Bayesian bounds for parameter estimation and nonlinear filtering/tracking*. IEEE Press, 2007.

[19] *Global positioning systems, inertial navigation and integration*. John Wiley and Sons, Inc., 2nd edition, 2007.

[20] A. P. Dempster and N. M. Laird and D. B. Rubin. Maximum-likelihood from incomplete data via the EM algorithm. *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, 39(1):1--38, 1977.

[21] D. L. Alspach and H. W. Sorenson. Nonlinear bayesian estimation using Gaussian sum approximations. *IEEE Trans. Automatic Control*, 17(4):439-448, 1972.

[22] P. O. Amblard and J.-M. Brossier and E. Moisan. Phase tracking: what do we gain from optimality. *Elsevier Signal Processing*, 83:151-167, 2003.

[23] K. Bell. *Performance bounds in parameter estimation with application to bearing estimation*. PhD thesis, George Mason University, Fairfax, Virginia, USA, 1995.

-
- [24] C. Fernández. *Advanced signal processing techniques for global navigation satellite systems receivers*. PhD thesis, Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, Espagne, 2005.
- [25] D.-J. Lee. *Nonlinear bayesian filtering with applications to estimation and navigation*. PhD thesis, Texas A & M University, Texas, USA, 2005.
- [26] F. B. Salem. *Réception particulière pour canaux multi-trajets évanescents en communications radiomobiles*. PhD thesis, Université Paul Sabatier de Toulouse, Toulouse, France, 2002.
- [27] *Sequential Monte Carlo methods in practice*. Springer, 2001.
- [28] H. Abeida and J. P. Delmas. Statistical performance of MUSIC-like algorithms in resolving noncircular sources. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 56(9):4317-4329, 2008.
- [29] I. Arasaratnam and S. Haykin. Square-Root Quadrature Kalman Filtering. *IEEE Trans. Signal Processing*, 56(6):2589-2593, 2008.
- [30] I. Arasaratnam and S. Haykin and R. J. Elliot. Discrete-time Nonlinear Filtering Algorithms using Gauss-Hermite Quadrature. *Proc. of the IEEE*, 95(5):953-977, 2007.
- [31] M. S. Arulampalam and S. Maskell and N. Gordon and T. Clapp. A tutorial on particle filters for online nonlinear/non-Gaussian bayesian tracking. *Special Issue of IEEE Trans. on Signal Processing*, 50(2):174-188, 2002.
- [32] L. N. Atallah and J.-P. Barbot and P. Larzabal. SNR threshold indicator in Data-Aided frequency synchronization. *IEEE Signal Processing Letters*, 11(8):652-654, 2004.
- [33] T. Aulin and C. E. Sundberg. Continuous phase modulation - parts I and II. *IEEE Trans. on Communications*, 29:196-225, 1981.
- [34] T. Aulin and C. E. Sundberg. Synchronization properties of continuous phase modulation. *Proc. of Globecom*, 1982.
- [35] K. E. Baddour and N. C. Beaulieu. Autoregressive modeling for fading channel simulation. *IEEE Trans. on Wireless Communications*, 4(4):1650-1662, 2005.
- [36] E. W. Barankin. Locally best unbiased estimates. *Annals of Mathematical Statistics*, 20:477-501, 1949.
- [37] S. Bay and B. Geller and A. Renaux and J.-P. Barbot and J.-M. Brossier. On the hybrid Cramér-Rao bound and its application to dynamical phase estimation. *IEEE Signal Processing Letters*, 15:453-456, 2008.
-

[38] S. Bay and C. Herzet and J.-M. Brossier and J.-P. Barbot and B. Geller. Analytic and asymptotic analysis of bayesian Cramér-Rao bound for dynamical phase offset estimation. *IEEE Trans. Signal Processing*, 56(1):61-70, 2008.

[39] K. L. Bell and H. L Van Trees. Combined Cramér-Rao/Weiss-Weinstein bound for tracking target bearing. *4th IEEE Workshop on Sensor Array and Multi-Channel Processing (SAM 2006)*, Waltham, MA, pages 273-277, 2006.

[40] K. Bell and Y. Steinberg and Y. Ephraim and H. L. Van Trees. Extended Ziv-Zakai lower bound for vector parameter estimation. *IEEE Trans. on Information Theory*, 43(2):624-637, 1997.

[41] S. Bellini and G. Tartara. Bounds on error in signal parameter estimation. *IEEE Trans. Communications*, 22:340-342, 1974.

[42] V. E. Benes. Exact finite-dimensional filters with certain diffusion with nonlinear drift. *Stochastics*, 5(1):65-92, 1981.

[43] I. Bergel and J. Weiss. Cramér-Rao bound on timing recovery of linearly modulated signals with no ISI. *IEEE Trans. on Communications*, 51(4):634-640, 2003.

[44] A. Bhattacharyya. On some analogues of the amount of information and their use in statistical estimation. *Sankhya Indian Journal of Statistics*, 8:1-14, 201-218, 315-328, 1946.

[45] B. Z. Bobrovsky and E. Mayer-Wolf and M. Zakai. Some classes of global Cramér-Rao bounds. *Annals of Statistics*, 14:1421-1438, 1987.

[46] B. Z. Bobrovsky and M. Zakai. A lower bound on the estimation error for certain diffusion processes. *IEEE Trans. on Information Theory*, 22(1):45-52, 1976.

[47] B. Z. Bobrovsky and M. Zakai. A lower bound on the estimation error for Markov processes. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 20(6):785-788, 1975.

[48] R. S. Bucy and K. D. Senne. Digital synthesis of nonlinear filters. *Automatica*, (7):287-298, 1971.

[49] R. S. Bucy and H. Youssef. Nonlinear filter representation via spline functions. *the 5th Symp. Nonlinear Estimation*, pages 51-60, 1974.

[50] O. Cappe and S. J. Godsill and E. Moulines. An overview of existing methods and recent advances in sequential Monte Carlo. *Proc. of the IEEE*, 95(5):899-924, 2007.

[51] D. G. Chapman and H. Robbins. Minimum variance estimation without regularity assumptions. *Annals of Mathematical Statistics*, 22:581-586, 1951.

[52] H. Chen and R. Perry and K. Buckley. Direct and EM-based MAP sequence estimation with unknown time-varying channels. *Proc. of the IEEE ICASSP*, 4:2129-2132, 2001.

-
- [53] Z. Chen. Bayesian Filtering: From Kalman Filters to Particle Filters, and Beyond. Technical report, McMaster University, 2003.
- [54] P. Chevalier and F. Pipon. New insights into optimal widely linear array receivers for the demodulation of BPSK, MSK, and GMSK signals corrupted by noncircular interferences - application to SAIC. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 54(3):870-883, 2006.
- [55] P. Closas and C. Fernández-Prades and D. Bernal and J. A. Fernández-Rubio. Bayesian direct position estimation. *Proc. of ION GNSS '08*, 2008.
- [56] P. Closas and C. Fernández-Prades and J. A. Fernández-Rubio. A Bayesian approach to multipath mitigation in GNSS receivers. *IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing*, 3(4):695-706, 2009.
- [57] P. Closas and C. Fernández-Prades and J. A. Fernández-Rubio. A particle filter tracking algorithm for GNSS synchronization using Laplace's method. *Proc. of the IEEE ICASSP '08*, :3409-3412, 2008.
- [58] P. Closas and C. Fernández-Prades and J. A. Fernández-Rubio. Bayesian DLL for multipath mitigation in navigation systems using particle filters. *Proc. of the IEEE ICASSP '06*, :695-706, 2006.
- [59] P. Closas and C. Fernández-Prades and J. A. Fernández-Rubio. Cramér-Rao bound analysis of positioning approaches in GNSS receivers. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 2009.
- [60] P. Closas and C. Fernández-Prades and J. A. Fernández-Rubio. Direct position estimation approach outperforms conventional two-steps positioning. *Proc. of EUSIPCO '09*, 2009.
- [61] P. Closas and C. Fernández-Prades and J. A. Fernández-Rubio. Maximum likelihood estimation of position in GNSS. *IEEE Signal Processing letters*, 14(5):359-362, 2007.
- [62] R. Cools. Constructing cubature formulas: the science behind the art. *Acta Numerica*, :1-54, 1997.
- [63] W. G. Cowley. Phase and frequency estimation for PSK packets: bounds and algorithms. *IEEE Trans. Communications*, 44(1):26-28, 1996.
- [64] J. Crassidis. Sigma-point Kalman filtering for integrated GPS and inertial navigation. *IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems*, 42(2):750-756, 2006.
- [65] A. N. D'Andrea and U. Mengali. Symbol timing estimation with CPM modulation. *IEEE Trans. on Communications*, 44(10):1362-1372, 1996.
- [66] A. N. D'Andrea and U. Mengali and R. Reggiannini. The modified Cramér-Rao bounds and its application to synchronization problems. *IEEE Trans. on Communications*, 42(2-4):1391-1399, 1994.
-

-
- [67] D. Bernal and P. Closas and E. Calvo and J. A. Fernández--Rubio. Tight GNSS/INS Integration as a Constrained Least--Squares Problem. *Proc. EUSIPCO*, pages 85--89, Glasgow, Scotland, 2009.
- [68] D. Bernal and P. Closas and J. A. Fernández--Rubio. Particle Filtering Algorithm for Ultra--tight GNSS/INS Integration. *Proc. ION GNSS*, pages 2137--2144, Savannah, GA, 2008.
- [69] R. Dabora and J. Goldberg and H. Messer. Training-based time-delay estimation for CPM signals over time-selective fading channels. *IEEE Trans. on Communications*, 52(7):1169-1177, 2004.
- [70] F. Daum. Nonlinear filters: beyond the kalman filter. *Aerospace and Electronic Sys. Magazine*, 20(8):57-69, 2005.
- [71] V. Digalakis and J. Rohlicek and M. Ostendorf. ML estimation of a stochastic linear system with the EM algorithm and its application to speech recognition. *IEEE Trans. on Speech Audio Processing*, 1(4):431-442, 1993.
- [72] P. Djurić and J. H. Kotecha and J. Zhang and Y. Huang and T. Ghirmai and M. F. Bugallo and J. Míguez. Particle filtering. *IEEE Signal Processing Magazine*, 140(2):19-38, 2003.
- [73] A. Doucet and S. J. Godsill and C. Andrieu. On sequential Monte Carlo sampling methods for Bayesian filtering. *Statistics and Computing*, 10:197-208, 2000.
- [74] C. Fernández-Prades and P. Closas and J. Vilà-Valls. Nonlinear filtering for ultra-tight GNSS/INS integration. Cape Town, South Africa, 2010. Proc. of the IEEE International Communications Conference, ICC 2009.
- [75] Carles Fernández-Prades and J. Vilà-Valls. Bayesian nonlinear filtering using quadrature and cubature rules applied to sensor data fusion for positioning. Cape Town, South Africa, 2010. Proc. of the IEEE International Communications Conference, ICC 2010.
- [76] R. J. P. Figueiredo and J. G. Jan. Spline filters. in *Proc. of the 2th Symp. Nonlinear Estimation*, pages 127-138, 1971.
- [77] J. F. G. Freitas and M. Niranjana and A. H. Gee. Nonlinear state space learning with EM and neural networks. *Proc. of the IEEE IWNNSP*, :254-263, 1998.
- [78] D. Gabor. Theory of communication. *Journal of the Institution of Electrical Engineers*, 93(3):429-457, 1946.
- [79] M. Ghogho and A. Swami and T.S Durrani. Frequency estimation in the presence of Doppler spread: performance analysis. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 49(4):777-789, 2001.
- [80] F. Gini and R. Reggiannini. On the use of Cramér-Rao-like bounds in the presence of random nuisance parameters. *IEEE Trans. on Communications*, 48(12):2120-2126, 2000.
-

-
- [81] F. Gini and R. Reggiannini and U. Mengali. The modified Cramér-Rao bound in vector parameter estimation. *IEEE Trans. on Communications*, 46(1):52-60, 1998.
- [82] A. Giremus and A. Doucet and V. Calmettes and J.-Y. Tournet. A Rao-Blackwellized particle filter for INS/GPS integration. *Proc. of the IEEE ICASSP '01*, 2001.
- [83] A. Giremus and J.-Y. Tournet and V. Calmettes. A particle filter approach for joint detection/estimation of multipath effects on GPS measurements. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 4(55):1275-1285, 2007.
- [84] N. J. Gordon and D. J. Salmond and A. F. M. Smith. Novel approach to nonlinear/non-Gaussian Bayesian state estimation. *IEE Proc.*, 140(2):107-113, 1993.
- [85] J. M. Hammersley. On estimating restricted parameters. *Annals of the Royal Statistics Society (Series B)*, 12:192-240, 1950.
- [86] H. Hijazi and L. Ros. Analytical Analysis of Bayesian Cramer-Rao Bound for Dynamical Rayleigh Channel Complex Gains Estimation in OFDM systems. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 57(5):1889-1900, 2009.
- [87] J. Huber and W. Liu. Data-aided synchronization of coherent CPM receivers. *IEEE Trans. on Communications*, 40(1):178-188, 1992.
- [88] M. Irsigler and B. Eissfeller. Comparison of multipath mitigation techniques with consideration of future signal structures. *Proc. of the ION GPS/GNSS '03*, 2003.
- [89] K. Ito and K. Xiong. Gaussian filters for nonlinear filtering problems. *Trans. Automatic Control*, 45(5):910-927, 2000.
- [90] Y. Jiang and F. Sun and J. Baras. On the true Cramér-Rao lower bound for DA joint estimation of carrier phase and timing offsets. *Proc. of the IEEE ICC '00*, :331-335, 2000.
- [91] Y. Jiang and F.-W. Sun and J. S. Baras. On the performance limits of Data-Aided synchronization. *IEEE Trans. on Information Theory*, 49(1):191-203, 2003.
- [92] S. J. Julier. The scaled unscented transformation. pages 4555-4559, 1997. Proc. of the American Control Conference, ICC 2009.
- [93] S. J. Julier and J. K. Uhlmann and H. F. Durrant-Whyte. A new method for nonlinear transformation of means and covariances in filters and estimators. *IEEE Trans. Automatic Control*, 45(3):472-482, 2000.
- [94] R. Van der Merwe. *Sigma-point kalman filters for probabilistic inference in dynamic state-space models*. PhD thesis, Oregon Health and Science University, Portland, Oregon, USA, 2004.
-

-
- [95] G. Seco. *Antenna arrays for multipath and interference mitigation in GNSS*. PhD thesis, Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, Espagne, 2000.
- [96] C. E. Shannon. A mathematical theory of communication. *Bell systems technical journal*, 1948.
- [97] *Understanding GPS: principles and applications*. Artech House, 2nd edition, 2006.
- [98] S. J. Julier and J. K. Uhlmann. Unscented filtering and nonlinear estimation. *Proc. of the IEEE*, 92(3):401-422, 2004.
- [99] R. E. Kalman. A new approach to linear filtering and prediction problems. *J. Basic Eng., Trans. ASME*, 82(1):35-45, 1960.
- [100] R. E. Kalman and R. S. Bucy. New results in linear filtering and prediction theory. *J. Basic Eng., Trans. ASME*, 83(3):95-108, 1961.
- [101] M. E. Khan and D. N. Dutt. An expectation-maximization algorithm based kalman smoother approach for event-related desynchronization (ERD) estimation from EEG. *IEEE Trans. on Biom.*, 54(7):1191-1198, 2007.
- [102] J.-S. Kim and D.-R. Shin and E. Serpedin. Adaptive multiuser receiver with joint channel and time delay estimation of CDMA signals based on the square-root unscented filter. *Elsevier Digital Signal Processing*, 19:504-520, 2009.
- [103] K. J. Kim and R. A. Iltis. Frequency offset synchronization and channel estimation for the MIMO-OFDM system using Rao-Blackwellized Gauss-Hermite filter. *Proc. of the WCNC '06*, :860-865, 2006.
- [104] C. H. Knapp and G. C. Carter. The generalized correlation method for estimation of time delay. *IEEE Trans. on Acoustics, Speech and Sig. Processing*, 24:320-327, 1976.
- [105] B. Krach and M. Lentmaier and P. Robertson. Bayesian detection and tracking for joint positioning and multipath mitigation in GNSS. *IEEE WPNC '08*, :173-180, 2008.
- [106] M. Lei and C. Han. Sequential nonlinear tracking using UKF and raw range-rate measurements. *IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems*, 43(1):239-250, 2007.
- [107] M. Lentmaier and B. Krach. A Bayesian approach to multipath mitigation in GNSS receivers. *Proc. of the ION GNSS '06*, 2008.
- [108] M. Lentmaier and B. Krach and P. Robertson. Maximum likelihood multipath estimation in comparison with conventional delay lock loops. *International Journal of Navigation and Observation*, :1741-1751, 2006.
-

-
- [109] Y. Li and C. Rizos and J. Wang and P. Mumford and W. Ding. Sigma-point kalman filtering for tightly coupled GPS/INS integration. *Navigation*, 55(3):167-178, 2008.
- [110] M. Moeneclaey. On the true and modified Cramér-Rao bounds for the estimation of a scalar parameter in the presence of nuisance parameters. *IEEE Trans. on Communications*, 46(11):1536-1544, 1998.
- [111] M. Moeneclaey and G. Jonghe. ML-orientated NDA carrier synchronization for general rotationally symmetric signal constellations. *IEEE Trans. on Communications*, 42(8):2531-2533, 1994.
- [112] M. Morelli and U. Mengali. Joint frequency and timing recovery for MSK-type modulation. *IEEE Trans. on Communications*, 47(6):938-946, 1999.
- [113] A. R. Nayak and J. R. Barry and G. Feyh and S. W. McLaughlin. Timing recovery with frequency offset and random walk: Cramér-Rao bound and a Phase-Locked loop postprocessor. *IEEE Trans. on Communications*, 54(11):2004-2013, 2006.
- [114] N. Noels and H. Steendam and M. Moeneclaey. The Cramér-Rao bound for phase estimation from coded linearly modulated signals. *IEEE Communications Letters*, 7(5):207-209, 2003.
- [115] N. Noels and H. Steendam and M. Moeneclaey. The true Cramér-Rao bound for carrier frequency estimation from a psk signal. *IEEE Trans. on Communications*, 52(5):834-844, 2004.
- [116] N. Noels and H. Steendam and M. Moeneclaey and H. Brueel. Carrier phase and frequency estimation for pilot-assisted transmission: bounds and algorithms. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 53(12):4578-4587, 2005.
- [117] N. Noels and H. Wymeersch and H. Steendam and M. Moeneclaey. The Cramér-Rao bound for timing recovery from a bandlimited linearly modulated waveform with unknown carrier phase and frequency. *IEEE Trans. on Communications*, 52(3):473-483, 2004.
- [118] M. Norgaard and N. K. Poulsen and O. Ravn. New developments in state estimation of nonlinear systems. *Automatica*, 36:1627-1638, 2000.
- [119] F. Patenaude and J. H. Lodge and P. A. Galko. Symbol timing tracking for continuous phase modulation over fast flat-fading channels. *IEEE Trans. on Vehicular Technology*, 40:615-626, 1991.
- [120] M.G. Petovello and G. Lachapelle. Comparison of Vector-Based Software Receiver Implementations with Application to Ultra-Tight GPS/INS Integration. *Proc. ION GNSS*, pages 1790--1799, Fort Worth, TX, 2006.
- [121] R. Babu and J. Wang. Ultra--tight GPS/INS/PL integration: a system concept and performance analysis. *GPS Solutions*, 13(1):75--82, 2009.
-

[122] I. Rapoport and Y. Oshman. Weiss-Weinstein lower bounds for Markovian systems. Part 1: theory. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 55(5):2016-2030, 2007.

[123] I. Rapoport and Y. Oshman. Weiss-Weinstein lower bounds for Markovian systems. Part 2: applications to fault-tolerant filtering. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 55(2):2031-2042, 2007.

[124] H. E. Rauch. Solutions to the linear smoothing problem. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 8:371-372, 1963.

[125] S. Reece and D. Nicholson. Tighter alternatives to the Cramér-Rao lower bound for discrete-time filtering. *7th. Intl. Conf. Info. Fusion*, pages 101-106, 2005.

[126] A. Renaux. Weiss-Weinstein bound for Data-Aided carrier synchronization. *IEEE Signal Processing Letters*, 14(4):283-286, 2007.

[127] A. Renaux and P. Forster and P. Larzabal and C. D. Richmond and A. Nehorai. A fresh look at the Bayesian bounds of the Weiss-Weinstein family. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 56(11):5334-5352, 2008.

[128] J. Rezaie and B. Moshiri and B. N. Araabi and A. Asadian. GPS/INS integration using nonlinear blending filters. pages 1674-1680, Kagawa, Japan, 2007. Proc. of the International Conference on Instrumentation, Control and Information Technology, SCIE 2007.

[129] J. Riba. A performance lower bound for quadratic timing recovery accounting for the symbol transition density. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 52(11):3278-3288, 2004.

[130] J. Riba and J. Sala and G. Vázquez. Conditional maximum likelihood timing recovery: estimators and bounds. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 49(4):835-850, 2001.

[131] J. Riba and G. Vazquez. Non-data-aided frequency offset and symbol timing estimation for binary CPM: performance bounds. *Proc. of ICASSP*, 5:2549-2552, 2000.

[132] B. M. F. Rice and B. Cowley and M. Rice. Cramér-Rao lower bounds for QAM phase and frequency estimation. *IEEE Trans. Communications*, 49(9):1582-1591, 2001.

[133] F. Rice. Carrier-phase and frequency-estimation bounds for transmissions with embedded reference symbols. *IEEE Trans. on Communications*, 54(2):221-225, 2006.

[134] D. C. Rife and R. R. Boorstyn. Single tone parameter estimation from discrete-time observations. *IEEE Trans. on Information Theory*, 20:591-598, 1974.

[135] Y. Rockah and P. M. Schultheiss. Array shape calibration using sources in unknown locations- Part I: near-field sources. *IEEE Trans. on Acous. Speech and Sig. Processing*, 35:286-299, 1987.

[136] S. Godsill and J. Vermaak and W. Ng and J. Li. Models and Algorithms for tracking of maneuvering objects using Variable Rate Particle Filters. *Proceedings of the IEEE*, 95(5):925--952, 2007.

-
- [137] M. Simandl and J. Královec and P. Tichavský. Filtering, predictive, and smoothing Cramér-Rao bounds for discrete-time nonlinear dynamic systems. *Automatica*, 37:1703-1716, 2001.
- [138] E. Simon and L. Ros and K. Raoof. Synchronization over rapidly time-varying multi-path channels for CDMA downlink receiver in Time-Division mode. *IEEE Trans. on Vehicular Technology*, 56(4):2216-2225, 2007.
- [139] D. Sornette and K. Ide. The Kalman-Lévy filter. *Elsevier Physica D*, 151:142-174, 2001.
- [140] G. N. Tavares and L. M. Tavares. The true Cramér-Rao lower bound for Data-Aided carrier-phase-independent time-delay estimation from linearly modulated waveforms. *IEEE Trans. on Communications*, 54(1):128-140, 2006.
- [141] G. N. Tavares and L. M. Tavares and M. S. Piedade. On the Miller-Chang lower bound for NDA carrier phase estimation. *IEEE Trans. on Communications*, 52(11):128-140, 2004.
- [142] P. Tichavský and C. H. Muravchik and A. Nehorai. Posterior Cramér-Rao bounds for discrete-time nonlinear filtering. *IEEE Trans. Signal Processing*, 46(5):1386-1396, 1998.
- [143] R. Usmani. Inversion of Jacobi's tridiagonal matrix. *Computers Math. Applic.*, 27(8):56-59, 1994.
- [144] R. Van der Merwe and A. Doucet and N. Freitas and E. Wan. The Unscented Particle Filter. Technical report, University of Cambridge, 2000.
- [145] R. Van der Merwe and E. A. Wan. Efficient derivative-free Klamen filters for online learning. *European Symposium on Artificial Neural Networks*, pages 205-210, 2001.
- [146] R. Van der Merwe and E. A. Wan. The Square-Root Unscented Kalman Filter for State and Parameter-Estimation. *International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, pages 3461-3464, 2001.
- [147] R. D. J. Van Nee and J. Sierveld and P. C. Fenton and B. R. Townsend. The multipath estimating delay loop lock: approaching theoretical accuracy limits. pages 246-251, 1994. Position, Location and Navigation Symposium, PLANS 1994.
- [148] T. Vercauteren and X. Wang. Decentralized sigma-point information filters for target tracking in collaborative sensor networks. *IEEE Trans. on Signal Processing*, 53(8):2997-3009, 2005.
- [149] J. Vilà-Valls and J.-M. Brossier and L. Ros. Extended Kalman filter for oversampled dynamical phase offset estimation. Dresden, Germany, 2009. Proc. of the IEEE International Conference on Communications, ICC 2009.
-

[150] J. Vilà-Valls and J.-M. Brossier and L. Ros. On-line Bayesian Cramér-Rao bound for oversampled dynamical phase offset estimation. Malta, 2008. Proc. of the IEEE 3rd International Symposium on Communications, Control and Signal Processing, ISCCSP 2008.

[151] J. Vilà-Valls and J.-M. Brossier and L. Ros. On-line hybrid Cramér-Rao bound for oversampled dynamical phase and frequency offset estimation. Honolulu, Hawaii, 2009. Proc. of the IEEE Global Communications Conference, Globecom 2009.

[152] J. Vilà-Valls and J.-M. Brossier and L. Ros. Oversampled carrier synchronization in digital communications with large excess bandwidth. Lymassol, Cyprus, 2010. Soumis à IEEE International Symposium on Communications, Control and Signal Processing, ISCCSP 2010.

[153] J. Vilà-Valls and J.-M. Brossier and L. Ros. Oversampled phase tracking in digital communications with large excess bandwidth. *Elsevier Signal Processing*, 90(3):821-833, 2010.

[154] H. Wang and P. Chang. On verifying the first-order Markovian assumption for a Rayleigh fading channel model. *IEEE Trans. on Vehicular Technology*, 45:353-357, 1996.

[155] E. Weinstein. Relations between Belini-Tartara, Chazan-Zakai-Ziv, and Wax-Ziv lower bounds. *IEEE Trans. on Information Theory*, 34(2):342-343, 1988.

[156] E. Weinstein and A.J. Weiss. A general class of lower bounds in parameter estimation. *IEEE Trans. on Information Theory*, 34:338-342, 1988.

[157] A.J. Weiss and E. Weinstein. A lower bound on the mean square error in random parameter estimation. *IEEE Trans. on Information Theory*, 31(5):680-682, 1985.

[158] Y. Yi and D. A. Grejner--Brzezinska. Tightly-coupled GPS/INS Integration Using Unscented Kalman Filter and Particle Filter. *Proc. ION GNSS*, pages 2182--2191, Fort Worth, TX, 2006.

[159] L. Zhang and Q. Cheng and Y. Wang and S. Zeadally. A novel distributed sensor positioning system using de dual of target tracking. *IEEE Trans. on Computers*, 57(2):246-260, 2008.

[160] J. Ziv and M. Zakai. Some lower bounds on signal parameter estimation. *IEEE Trans. on Information Theory*, 15(3):386-391, 1969.

10 Annexe 4 : Filtrage non linéaire et mise en œuvre particulière

10.1 Modèle d'état, observation

Le problème du filtrage non linéaire se pose simplement lorsque l'on considère des processus de Markov cachés. Dans une version générale, le problème du filtrage non linéaire consiste à estimer un processus de Markov observé à travers une équation d'observation. Le modèle considéré est

$$\begin{cases} \xi_k = f(\xi_{k-1}, w_k) \\ y_k = g(\xi_{k-1}, b_k) \end{cases} \quad (0.1)$$

La première équation appelée équation d'état définit un processus markovien, et la deuxième, appelée équation d'observation, donne la mesure de l'état à travers l'appareil de mesure g . La suite des vecteurs w_k est une séquence blanche, ainsi que le bruit de mesure b_k . La théorie de l'estimation indique que toute l'information pour estimer ξ_k est contenue dans la densité de probabilité *a posteriori* $p(\xi_k | y_{1:k})$, où $y_{1:k} = \{y_1, \dots, y_k\}$. Par exemple, le filtre optimal en moyenne quadratique n'est autre que la moyenne *a posteriori*. Dans le problème considéré, il faut obtenir une version récursive de l'estimation. Etant donnée la nature markovienne de l'état, il est assez facile de montrer que la densité *a posteriori* suit l'équation de récursion :

$$p(\xi_k | y_{1:k}) = \frac{p(y_k | \xi_k) \int p(\xi_k | \xi_{k-1}) p(\xi_{k-1} | y_{1:k-1}) d\xi_{k-1}}{p(y_k | y_{1:k-1})} \quad (0.2)$$

La connaissance de cette récursion est la solution du filtrage non linéaire optimal. Toutefois, pour obtenir des estimateurs implantables, il faut aller un peu plus loin et calculer, par exemple, la moyenne conditionnelle. Malheureusement, dès que l'équation d'état et/ou l'équation d'observation sont non linéaires, les calculs d'intégrales pour l'obtention d'estimateurs sont en général impossible analytiquement. Il faut alors avoir recours soit à des approximations (par exemple le filtre de Kalman étendu qui considère le modèle linéarisé), soit à des techniques numériques. Parmi ces techniques, les méthodes Monte-Carlo sont à l'honneur ces dernières années, et conduisent dans le cas du filtrage non linéaire au filtrage particulier.

10.2 Mise en œuvre particulière.

Cette technique est assez ancienne, mais son utilisation intensive n'est possible que grâce à l'explosion des capacités des ordinateurs modernes. Le filtrage particulier a été redécouvert et/ou étudié par de nombreux auteurs depuis le début des années 90. Une présentation unifiée est faite dans [1] en utilisant la notion d'échantillonnage d'importance.

Comme mentionné précédemment, une fois la densité *a posteriori* $p(\xi_k | y_{1:k})$ calculée, elle sert à l'évaluation d'estimateurs de la forme :

$$E_p[f(\xi_{0:k})] = \int p(\xi_{0:k} | y_{1:k}) f(\xi_{0:k}) d\xi_{0:k} \quad (0.3)$$

L'approche Monte-Carlo pour évaluer cette intégrale consiste à utiliser des réalisations d'une variable aléatoire distribuée suivant la loi *a posteriori* pour calculer des moyennes empiriques. Cette approche est intéressante dès que l'on sait échantillonner selon la loi *a posteriori*. Malheureusement, ceci est rarement le cas, et la technique d'échantillonnage d'importance est un remède intéressant. Cette méthode utilise une autre densité $q(\xi_{0:k} | y_{1:k})$ dont le support contient celui de $p(\xi_{0:k} | y_{1:k})$ et suivant laquelle il est facile d'échantillonner. Cette densité est dite densité instrumentale. Enfin, en utilisant l'évidente relation

$$E_p[f(\xi_{0:k})] = \int f(\xi_{0:k}) \frac{p(\xi_{0:k} | y_{1:k})}{q(\xi_{0:k} | y_{1:k})} q(\xi_{0:k} | y_{1:k}) d\xi_{0:k} = E_q \left[f(\xi_{0:k}) \frac{p(\xi_{0:k} | y_{1:k})}{q(\xi_{0:k} | y_{1:k})} \right] \quad (0.4)$$

et N réalisations $x_{0:k}(i) \sim q(\xi_{0:k} | y_{1:k})$, $i = 1 \dots N$, l'estimateur précédent est approché par la quantité

$$\widehat{E}_p[f(\xi_{0:k})] = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(x_{0:k}(i)) w^*(i) \text{ avec } w^*(i) = \frac{p(x_{0:k}(i) | y_{1:k})}{q(x_{0:k}(i) | y_{1:k})} \quad (0.5)$$

où les quantités $w^*(i)$ sont appelées poids d'importance. La loi des grands nombres permet alors de montrer que cette approximation converge presque sûrement vers $E_p[f(\xi_{0:k})]$ quand N tend vers l'infini. Il reste toutefois un problème puisqu'en écrivant

$$w^*(i) = \frac{p(y_{1:k} | x_{0:k}(i)) p(x_{0:k}(i))}{p(y_{1:k}) q(x_{0:k}(i) | y_{1:k})} \quad (0.6)$$

on s'aperçoit que l'évaluation des poids requiert le calcul de l'intégrale

$$p(y_{1:k}) = \int p(y_{1:k} | \xi_{0:k}) p(\xi_{0:k}) d\xi_{0:k} \quad (0.7)$$

calcul en général irréalisable. Mais remarquer que

$$p(y_{1:k}) = \int \frac{p(y_{1:k} | \xi_{0:k}) p(\xi_{0:k})}{q(y_{1:k} | \xi_{0:k})} q(y_{1:k} | \xi_{0:k}) d\xi_{0:k} = E_q \left[\frac{p(y_{1:k} | \xi_{0:k}) p(\xi_{0:k})}{q(y_{1:k} | \xi_{0:k})} \right] \quad (0.8)$$

permet de montrer que la forme

$$E_p[f(\xi_{0:k})] = \frac{E_q \left[f(\xi_{0:k}) \frac{p(y_{1:k} | \xi_{0:k}) p(\xi_{0:k})}{q(\xi_{0:k} | y_{1:k})} \right]}{E_q \left[\frac{p(y_{1:k} | \xi_{0:k}) p(\xi_{0:k})}{q(\xi_{0:k} | y_{1:k})} \right]} \quad (0.9)$$

est exploitable pour l'approximation. On a en effet

$$\widehat{E}_p[f(\xi_{0:k})] = \frac{\sum_{i=1}^N f(x_{0:k}(i))w(i)}{\sum_{i=1}^N w(i)} \text{ avec } w(i) = \frac{p(y_{1:k} | x_{0:k}(i))p(x_{0:k}(i))}{q(x_{0:k}(i) | y_{1:k})} \quad (0.10)$$

Cette approximation est toutefois biaisée pour un nombre N fini de réalisations, mais converge toujours presque sûrement quand N tend vers l'infini.

10.3 Filtre particulaire.

La suite du développement consiste à rendre récursif l'algorithme d'échantillonnage d'importance. Une condition suffisante pour obtenir une forme récursive est que la loi instrumentale $q(\xi_{0:k} | y_{1:k})$ factorise en $q(\xi_{0:k-1} | y_{1:k-1})q(\xi_k | \xi_{0:k-1}, y_{1:k})$. Dans ce cas, à l'étape k de l'algorithme, on ne rééchantillonne pas $x_{0:k}(i)$ suivant tout le passé, mais uniquement suivant $x_k(i) \sim q(\xi_k | \xi_{0:k-1}, y_{1:k})$, les réalisations devenant $x_{0:k-1}(i), x_k(i)$. La terminologie *particulaire* vient de là : $x_k(i)$ représente une particule dont la dynamique est gérée par la densité $q(\xi_k | \xi_{0:k-1}, y_{1:k})$. On montre alors facilement que les poids sont mis à jour récursivement selon :

$$w_k(i) = \widetilde{w}_{k-1}(i) \frac{p(y_k | x_k(i))p(x_k(i) | x_{k-1}(i))}{q(x_k(i) | x_{0:k-1}(i), y_{1:k})} \quad (0.11)$$

$$\widetilde{w}_k(i) = \frac{w_k(i)}{\sum_{j=1}^N w_k(j)} \quad (0.12)$$

Il est montré dans [1] que la loi instrumentale $q(\xi_k | \xi_{0:k-1}, y_{1:k}) = p(\xi_k | \xi_{k-1}, y_k)$ minimise la variance des poids, conditionnellement à $\xi_{0:k-1}, y_{1:k}$. Cette loi est malheureusement rarement calculable, et d'autres lois instrumentales doivent être considérées.

La plus simple est la loi *a priori* de l'état $p(\xi_k | \xi_{k-1})$. Le problème de cet instrument est qu'il ne dépend pas de l'observation.

Toutefois, quelle que soit la loi choisie, le problème le plus important est la dégénérescence de l'algorithme. En effet, il peut être constaté (ou montré, voir par exemple [1]), que les poids des particules tendent tous vers 0 quand k tend vers l'infini, sauf pour une particule dont le poids tend vers 1. Cette dégénérescence se comprend bien lorsque la loi instrumentale est la loi *a priori* de l'état $p(\xi_k | \xi_{k-1})$. Dans ce cas, chaque particule diffuse dans l'espace d'état et devient de moins en moins vraisemblable, les poids représentent la vraisemblance de la particule et tendent donc vers 0, sauf une évidemment qui correspond à la particule la plus vraisemblable. Cette dégénérescence est donc due au fait que N est fini.

Pour éviter cette dégénérescence, les particules doivent interagir entre elles d'une façon ou d'une autre. Cette interaction s'effectue en général à l'aide d'une *redistribution* selon la loi discrète définie par les poids. Quand une redistribution est effectuée, les particules les moins vraisemblables meurent, alors que les plus vraisemblables prolifèrent. Le point délicat est de décider d'une redistribution. Nous adoptons un point de vue heuristique. L'ensemble des particules est très efficace si les poids sont tous égaux à $1/N$. Cette efficacité est alors mesurée à l'aide de l'entropie de la loi définie par les poids

$$H_k(\tilde{w}) = - \sum_{i=1}^N \tilde{w}_k(i) \log_2 \tilde{w}_k(i) \quad (0.13)$$

L'entropie est maximale ($\log_2 N$ bits) quand l'ensemble de particules est le plus efficace, et est minimale lorsqu'une particule travaille seule. On décide donc de redistribuer lorsque l'entropie chute en dessous d'un seuil prédéfini.

Références bibliographiques de l'annexe 4 (chapitre 10)

- [1] A. Doucet. Algorithmes de Monte Carlo pour l'estimation Bayésienne de modèles Markoviens cachés. Thèse Orsay 1997.
- [2] P. O. Amblard, J.M. Brossier and E. Moisan. *Phase tracking: what do we gain from optimality? Particle filtering versus phase-locked loops*. Elsevier Signal Processing, vol. 83, pp. 151-167, Oct. 2003.

11 Conclusion Générale

Notre travail a consisté à étudier des algorithmes de synchronisation pour une forme d'onde GSM émise par un mobile, et réceptionnée au niveau d'une (ou plusieurs) station de base fixe. L'estimation du délai de propagation délivrée pourra ainsi être utilisée pour les algorithmes de synchronisation développée par Thales dans le cadre du projet LURGA. Initialement, nous avons envisagé d'utiliser des algorithmes de type particulière pour estimer ce délai, mais le modèle de canal défini progressivement au cours du projet puis arrêté par les différents partenaires, nous a finalement orienté vers d'autres solutions moins complexes au niveau calculatoire, et de même performance, comme montré dans [G8] pour un problème similaire. Nos algorithmes ont été développés dans le cadre d'un modèle de canal radio-mobile aléatoire de type Rayleigh, à spectre de Jakes, paramétré par l'écart de fréquence Doppler f_d , en supposant le (les) délai(s) du canal fixe sur la durée d'un slot GSM, égale à 577 μ sec. Nous avons développé et testé 2 algorithmes, dans le cas d'un canal mono-trajet, puis les avons étendus au cas multi-trajet. Pour situer les performances des algorithmes, les bornes de Cramér Rao qui correspondent à ce problème d'estimation ont aussi été calculées. Le premier algorithme est basé sur l'algorithme « Expectation-Maximization », permettant d'obtenir itérativement l'estimé au sens du Maximum de vraisemblance du délai, en présence de « paramètres de nuisance » (ou « états cachés ») que sont les gains complexes du canal sur la période d'un slot de communication. L'algorithme revient finalement dans l'étape « E » de l'itération présente à estimer les gains complexes du canal en supposant le délai connu (i.e. estimé à l'itération précédente) en utilisant un lisseur de Kalman, puis à délivrer dans l'étape « M » un nouveau estimé du délai en supposant connus les gains complexes. L'algorithme est initialisé grâce à une première estimation grossière du délai délivrée par la méthode de recherche du maximum de la corrélation. L'algorithme converge en quelques itérations, pour les vitesses maximales envisagées pour le mobile (120 km/h), avec des performances bien meilleures (en terme d'Erreur Quadratique Moyenne) que celles obtenues par la méthode conventionnelle par corrélation. De plus, les performances de l'algorithme en terme d'estimation de délai en présence de gains complexes inconnus sont très proche de celles du cas où l'on connaît parfaitement les gains complexes, ce qui est satisfaisant. Le deuxième algorithme est une variante de type bloc, dans laquelle les gains complexes et le délai sont estimés conjointement au sens du maximum à postériori. Les performances obtenues sont très similaires à celles du premier algorithme.

Nous avons aussi présenté en annexe des travaux préliminaires, développées en début du projet, sur des modèles un peu différents de formes d'ondes (de type satellite, BOC utilisées en GALILEO), de canal (amplitude fixe mais phase aléatoire), ou d'algorithmes (synthèse sur les méthodes particulières), ce qui a permis une première approche du problème.

Publications

12 Publications de GIPSA-lab sur la période du projet

	Titre	Partenaires	Type
[G1]	J. Vilà Valls, J.M. Brossier, L. Ros. <i>On-line Bayesian Cramér-Rao Bound for Oversampled Dynamical Phase Offset Estimation</i> . ISCCSP 2008.	GIPSA	Communications Internationales
[G2]	S. Bay, C. Herzet, J.M. Brossier, J.P. Barbot and B. Geller. <i>Analytic and Asymptotic Analysis of Bayesian Cramér-Rao Bound for Dynamical Phase Offset Estimation</i> . IEEE Trans. Signal Processing, January 2008.	GIPSA / SATIE	Articles acceptés dans des revues à comité de lecture
[G3]	Bay, S., Geller, B., Renaux, A., Barbot, J.-M. Brossier. <i>On the Hybrid Cramér-Rao bound and its application to dynamical phase estimation</i> . IEEE Signal Processing Letters, 2008.	GIPSA / SATIE	Articles acceptés dans des revues à comité de lecture
[G4]	J. Vilà Valls, J.-M. Brossier and L. Ros. <i>Extended Kalman Filter for Oversampled Dynamical Phase Offset Estimation</i> . IEEE ICC'09, Dresden, June 2009.	GIPSA	Communications Internationales
[G5]	J. Yang, B. Geller, C. Herzet, and J.M. Brossier. <i>Smoothing PLLs for QAM Dynamical Phase Estimation</i> . IEEE ICC'09, Dresden, June 2009.	GIPSA / SATIE	Communications Internationales
[G6]	J. Vilà Valls, J.-M. Brossier, L. Ros. <i>On-line Hybrid Cramér-Rao bound for oversampled dynamical phase and frequency offset estimation</i> . Globecom Nov. 2009, Honolulu, Hawaii.	GIPSA	Communications Internationales
[G7]	H. Abeida, J.-M. Brossier, L. Ros, J. Vilà Valls. <i>An EM Algorithm for Path Delay and Complex Gain Estimation of Slowly Varying Fading Channel for CPM Signals</i> . Globecom Nov. 2009, Honolulu, Hawaii.	GIPSA	Communications Internationales
[G8]	J. Vilà Valls, J.-M. Brossier, L. Ros. <i>Oversampled Dynamical Phase Offset Estimation in Digital Communication</i> . Elsevier Signal Processing, to be appeared in 2010.	GIPSA	Articles acceptés dans des revues à comité de lecture